宜蘭高中 98 學年度學生數理自然科學專題研究

題目：

海戰遊戲之研究

指導老師：

沈碧照

學生：

李維晉

陳儷修

海　戰　遊　戲

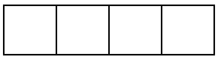
指導老師: 沈碧照

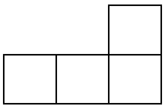
研究學生: **213 06** 李維晉、

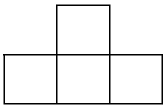
213 28 陳儷修

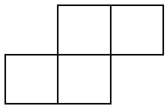
壹. 動機

在 400 個最新世界著名數學最值問題這本書中，有一個討論阻擋的問題：海戰遊戲。在一個 7×7 的方格正方形海域中有 4 連格圖形 (圖(a)) 的戰艦潛伏其中，一個子彈一次只能擊中一個方格，問：(1)為了保證擊中戰艦，最少應射擊多少次？(2)若戰艦為非正方形的四連格形 (圖(a),(b),(c),(d))，最少應射擊多少次？


圖(a)


圖(b)


圖(c)


圖(d)

但如果將海域改為 n×n 以及 m×n 的正方格矩形，最少應射擊多少次呢？

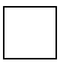
貳. 摘要

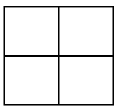
探討 n×n 以及 m×n 的正方格矩形海域中，2 連格形、3 連格形、4 連格形（可為正方形）的戰艦保證被擊中所需最少射擊次數。

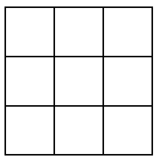
參. 目的

首先介紹圖形名詞：

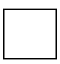
S_r 表示 r×r 的戰艦，例如：

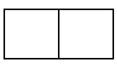

S_1

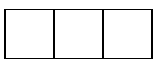

S_2


S_3

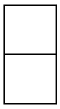
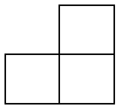
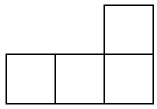
P_r 表示 1×r 的戰艦，例如：


P_1


P_2

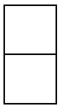
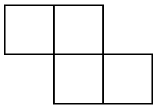
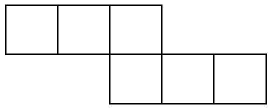

P_3

L_r表示 Pr 的最右上方一格接上一個方格的圖形，例如：

L_1　　　L_2　　　L_3

Z_r 表示 P_r的一端上方和另一個 P_r的一端下方相接，例如：

Z_1　　　Z_2　　　Z_3

先定義：
兩連格 爲 P_2 或 Z_1 或 L_1
三連格 爲 P_3 或 L_2
四連格 爲 P_4 或 L_3 或 S_2 或 Z_2
其中海域爲 m×n 或 n×n 的方格矩形，且連格旋轉後或翻轉後視爲同一種圖形。
$b(m,n,P_2)$表在 m×n 的方格矩形海域中保證擊中 P_2 形狀的戰艦所需最少子彈個數，依此類推 P_3、L_2、P_4、L_3、Z_2，

1.探討 $b(n,n,P_2)$ & $b(m,n,P_2)$的公式解法
2.探討 $b(n,n,P_3)$ & $b(m,n,P_3)$的公式解法
3.探討 $b(n,n,P_4)$ & $b(m,n,P_4)$的公式解法
4.探討 $b(m,n,L_2)$的公式解法
5.探討 $b(n,n,Z_2)$ & $b(m,n,Z_2)$的公式解法
6.探討 $b(n,n,S_2)$& $b(m,n,S_2)$的公式解法，再推廣至 S_r

肆. 器材

筆、紙、方格紙、電腦

伍. 過程

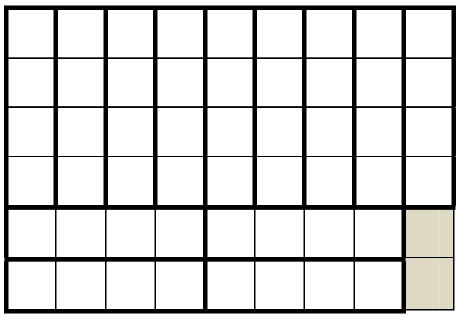
引用 1：m×n 的海域裡，最多可以放$\frac{mn-ab}{r}$個 P_r 戰艦

(m=rq+a , n=rp+b， 其中 0≤a,b≤r-1)

證明：

先把 m×n 海域每一行割出$\left[\frac{m}{r}\right]$=q 個 P_r，剩下最底下的 a 列。同理，將每列割出$\left[\frac{n}{r}\right]$=p 個 P_r，剩下最右邊的 b 行，無被分割的海域則是右下方的 a×b。故可分割出 $\frac{mn-ab}{r}$ 個 P_r 。

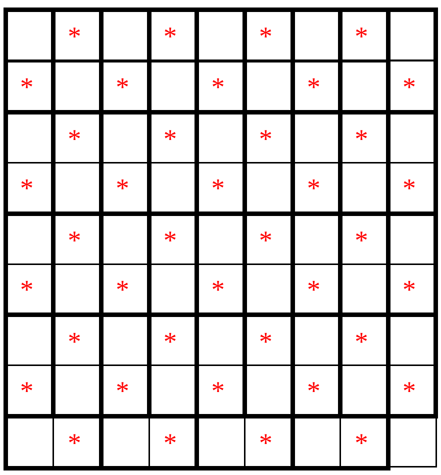
(以 P_4 和 6x9 海域舉例)



6x9 海域

1. b(n,n,P_2)&b(m,n, P_2)

(1) 當海域爲 n×n 的方形矩形，戰艦形狀爲 **P_2**



圖(1)

(i.)若子彈的位置爲(i , j)，

定義 B={(i , j) | $1 \le i , j \le n$ 且 $i+j \equiv 1 \pmod 2$}

此時 P_2 戰艦必被擊中，可稱 B 爲 P_2 的擊中集，n(B)= $\left[\frac{n^2}{2}\right]$

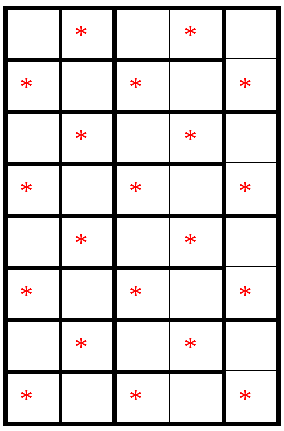
b(n,n,P_2) $\le$ n(B)= $\left[\frac{n^2}{2}\right]$

(ii.)令 n=2p+b , $0 \le b \le 1$

此時 n×n 的方格中可放置的 P_2 戰艦個數為 $\frac{n^2-b^2}{2}=\left[\frac{n^2}{2}\right]$ (如圖(1))，任一個 P_2 擊中集必須包含每個 P_2 圖形的至少一個方格。$\therefore b(n,n,P_2) \ge \frac{n^2-b^2}{2}=\left[\frac{n^2}{2}\right]$

由(i.) (ii.) $\to$ $b(n,n,P_2)=\left[\frac{n^2}{2}\right]$

(2.)推廣到 m×n 的方格矩形



圖(2)

(i.)同上，子彈的位置仍為(i , j) 同理，$n(B)=\left[\frac{mn}{2}\right]$，

$b(m,n,P_2) \le n(B)=\left[\frac{mn}{2}\right]$

(ii.)令 m=2q+a ,n=2p+b ,且 $0 \le a,b \le 1$。 此時 m×n 方格矩形中 P_2 戰艦個數為 $\frac{mn-ab}{2}=\left[\frac{mn}{2}\right]$ (如圖(2))

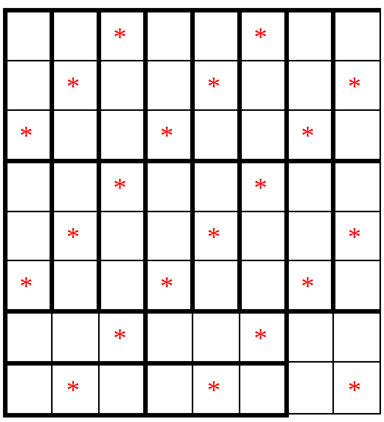
又任一個 P_2 擊中集必須包含每個 P_2 至少一個方格。

$\therefore b(m,n,P_2) \ge \frac{mn-ab}{2}=\left[\frac{mn}{2}\right]$

由(i.) (ii.) $\to$ $b(m,n,P_2)=\left[\frac{mn}{2}\right]$

2. b(n,n,P_3)& b(m,n,P_3)

(1.) 當海域為 n×n 的方形矩形，**戰艦形狀為 P_2 (n≥3)**



圖(3)

(i.)此時 $B=\{(i,j) \mid 1 \le i, j \le n$ 且 $i+j \equiv 1 \pmod 3\}$

如圖(3) 為 P_3 的一個擊中集。

其中 n(B)=

$$\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]+\left[\frac{n+2}{3}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]+\left[\frac{n+2}{3}\right]$$

+…… (共有 n 項)

Pf：$\left[\frac{n}{3}\right]$爲第一列“ * ”的個數

$\left[\frac{n+1}{3}\right]$爲第二列“ * ”的個數

∵第二列的“ * ”位置是第一列左移一格的結果

同理，$\left[\frac{n+2}{3}\right]$爲第三列“ * ”的個數

∵P_3是 1x3 的連格⇒三行一循環，三列一循環

∴第四行“ * ”個數爲$\left[\frac{n}{3}\right]$

第五行“ * ”個數爲$\left[\frac{n+1}{3}\right]$

$\Rightarrow$ n(B)= $\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]+\left[\frac{n+2}{3}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]+\left[\frac{n+2}{3}\right]$ +...... (共有 n 項) 得證

又不論 n=3k+1 , 3k+2 , 3k , k ∈N

$\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]=\left[\frac{2n}{3}\right]$, $\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]+\left[\frac{n+2}{3}\right]$ = n 恆成立

$\Rightarrow$ n(B)= $\left[\frac{n^2}{3}\right]$

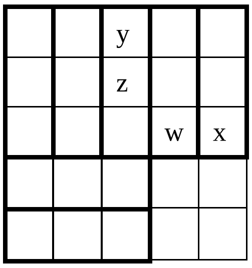
$b(n,n,P_3) \leq n(B)= \left[\frac{n^2}{3}\right]$

(ii.)令 n=3p+a , 0≤a≤2，將 nxn 的方格矩形海域以 P_3分割，可得$\frac{n^2-a^2}{3}$ 個 P_3圖形及右下方一個a^2的正方形。

當 0≤a<2 時 ，有$\left[\frac{n^2}{3}\right]$個 P_3圖形

當 a=2 時，有$\left[\frac{n^2}{3}\right]$-1 個 P_3圖形，任一個 P_3擊中集 B 必包含每個 P_3圖形的至少一方格，∴$b(n,n, P_3) \geq n(B) \geq \left[\frac{n^2}{3}\right]-1$ ，a=2 時右下角的圖形（如圖(4)），此時每個 P_3

圖形恰含有 B 中的一個方格，且右下角 S_2 不含有 B 中的方格



圖(4)

$\therefore S_2$ 上方的 P_3 圖形所含的唯一方格必在 w,x 處，但 w,x 上方四個方格沒有 B 中的方格，則其左邊的 P_3 圖形必須含有兩格 z,y 在 B 中，得到矛盾。

$\therefore b(n,n,P_3) \geq \left[\frac{n^2}{3}\right]$

由(i.) (ii.) $\rightarrow$ $b(n,n,P_2)=\left[\frac{n^2}{3}\right]$

(2.) 推廣到 m×n 方格矩形 **(n≥3)**

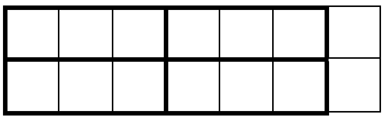
(i.)當 m≥3 時

同(1.)(i.)：$\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]+\left[\frac{n+2}{3}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]+\left[\frac{n+2}{3}\right]$ +…… (共有 m 項)

$\Rightarrow n(B)=\left[\frac{mn}{3}\right]$

當 m≤2 時

n=7



m=2

圖(5)

$n(B)=m\left[\frac{n}{3}\right]$,如圖(5)

$b(m,n,P_3) \leq n(B)=m\left[\frac{n}{3}\right]$,

(ii.)令 m=3q+a , n=3p+b , 0≤a , b≤2

此時 m×n 的方格矩形有 $\frac{mn-ab}{3}$ 個 P_3 圖形及一個 a×b 的矩形

① 當 m≤2 時，m=a，$\therefore \frac{mn-ab}{3}=m\left[\frac{n}{3}\right]$ ，$b(m,n,P_3)\geq m\left[\frac{n}{3}\right]$

② 當 m≥2 時

若 ab<3 時，有 $\left[\frac{mn}{3}\right]$ 個 P_3 圖形

若 ab≥3(即 ab=4)時，有 $\left[\frac{mn}{3}\right]-1$ 個 P_3 圖形

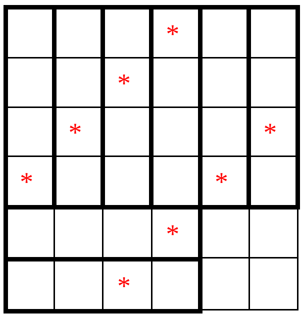
與(1.)(ii.)同理，事實上可得 $b(m,n,P_3) \geq \left[\frac{mn}{3}\right]$

由(i.) (ii.) →當 $m \leq 2$ 時，$b(m,n,P_3) = m\left[\frac{n}{3}\right]$

當 $m \geq 2$ 時，$b(m,n,P_3) = \left[\frac{mn}{3}\right]$

3.　$b(n,n,P_4)$& $b(m,n,P_4)$

(1.)當海域為 n×n 的方形矩形，戰艦形狀為 P_4


圖(6)

(i.) $B=\{(i , j) \mid 1 \leq i , j \leq n$ 且 $i+j \equiv 1 \pmod 4\}$ 是一個 P_4 擊中集(如圖(6))。

n(B)的算法與 2.同理，第 k+1 列的”x”位置皆為第 k 列(k > 0)的”x”位置左移一格的結果，4 列一循環。

⇒

$\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n+1}{4}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\left[\frac{n+3}{4}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n+1}{4}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\left[\frac{n+3}{4}\right]+\ldots\ldots$　共 n 項相加，

其中 $\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n+1}{4}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\left[\frac{n+3}{4}\right] = n$，

令 $n = 4p+a$　，　$0 \leq a \leq 3$

考慮最末 a 項和：

①當 $a = 0$　, $n(B) = \frac{n^2}{4} = \frac{n^2-0}{4}$

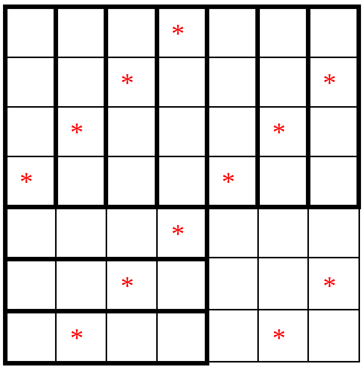
②當 $a = 1$　, $n(B) = n \times \frac{n-1}{4} + \left[\frac{4p+1}{4}\right]$ (最末一項)

$= \frac{n^2-1}{4}$

③當 $a = 2$　,

$n(B) = n \times \frac{n-2}{4} + \left[\frac{4p+2}{4}\right] + \left[\frac{4p+3}{4}\right]$　(最末兩項)

$$= \frac{n^2-2n}{4} + \frac{n-2}{4} + \frac{n-2}{4} = \frac{n^2-4}{4}$$



圖(7)

④當 a = 3 ，

$$n(B) = n \times \frac{n-3}{4} + \left[\frac{4p+3}{4}\right] + \left[\frac{4p+4}{4}\right] + \left[\frac{4p+5}{4}\right]$$

$$= \frac{n^2-3n}{4} + \frac{n-3}{4} + \left(\frac{n-3}{4}+1\right) + \left(\frac{n-3}{4}+1\right)$$

$$= \frac{n^2-3n}{4} + \frac{3n-9}{4} + 2 = \frac{n^2-9}{4} + 2$$ (如圖(7))

∴當 a = 0 ,1 ,2 時

$$b(n,n,P_4) \le \frac{n^2-a^2}{4}$$

當 a = 3 時

$$b(n,n,P_4) \le \frac{n^2-a^2}{4} + 2$$

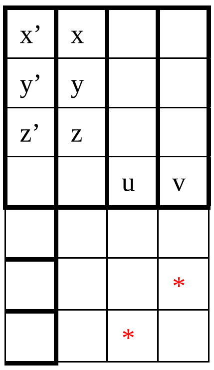
(ii.) 將 n×n 的方格矩形以 P_4 切割

共可得 $\frac{n^2-a^2}{4}$ 個 P_4 圖形

∵任一個 P_4 的擊中集必包含每一個 P_4 圖形的最少一個方格

$$\therefore\ b(n,n,P_4) \ge \frac{n^2-a^2}{4}$$

但當 a = 3 時，n × n 方格矩形中右下角圖形如下：



圖(8)

右下角有一 3x3 的正方形，此時每一個 P_4 圖形均含有 B 中唯一一個方格，但在此 3x3 的正方形上方之 P_4 圖形中的方格必須在 u , v 的位置(∵3x3 的正方形中不含 B 中的方格)，如此一來，x 和 x' 之間、y 和 y' 之間、z 和 z' 之間，都至少各含有一個 B 中的方格，得到矛盾。

必須在 3x3 的正方形中增加 2 個 B 中的方格

∴當 a = 0 , 1 , 2

$$b(n,n,P_4) \ge \frac{n^2-a^2}{4}$$

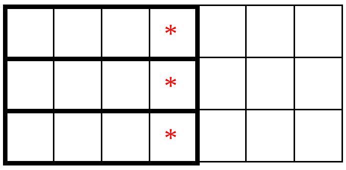
當 a = 3

$b(n,n,P_4) \ \geq \ \dfrac{n^2-a^2}{4}+2$

由(i.) (ii.) →當 a = 0 , 1 , 2 ，$b(m,n,P_4) = \dfrac{n^2-a^2}{4}$

當 a = 3，$b(m,n,P_4) = \dfrac{n^2-a^2}{4}+2$

(2.)推廣到 m×n 的方形矩形 , **n**≥4 , m≥ 0



圖(9)

(i.)當 m≤3 時

B'={(i , j) | 1≤i≤m, 1≤j≤n , i 爲 4 的倍數}

爲一個 P_4 的擊中集，$b(m,n,P_4) \ \leq \ m\left[\dfrac{n}{4}\right]$

$n(B') = m\left[\dfrac{n}{4}\right]$,如圖(9)

令 m =4q + b , n =4p + a , 0≤a,b≤3

如(1.)(i.)：

$n(B) = \left[\dfrac{n}{4}\right]+\left[\dfrac{n+1}{4}\right]+\left[\dfrac{n+2}{4}\right]+\left[\dfrac{n+3}{4}\right]+\left[\dfrac{n}{4}\right]+\left[\dfrac{n+1}{4}\right]+\left[\dfrac{n+2}{4}\right]+\left[\dfrac{n+3}{4}\right]+\ldots\ldots$ (共 m 項相加)，其中$\left[\dfrac{n}{4}\right]+\left[\dfrac{n+1}{4}\right]+\left[\dfrac{n+2}{4}\right]+\left[\dfrac{n+3}{4}\right] = n$

考慮最末 b 項和：

①當 b = 0 ： $n(B) = m\times\dfrac{n}{4}$

②當 1≤b≤3： 最末 b 項和爲$\left[\dfrac{n}{4}\right]+\left[\dfrac{n+1}{4}\right]+\ldots\ldots+\left[\dfrac{n+b-1}{4}\right] =$

$\left[\dfrac{4p+a}{4}\right]+\left[\dfrac{4p+a+1}{4}\right]+\ldots\ldots+\left[\dfrac{4p+a+b-1}{4}\right]$

最末 b 項和	b =1	b = 2	b = 3
a = 0	P	2p	3p
a = 1	P	2p	3p
a = 2	P	2p	3p+1
a = 3	P	2p + 1	3p+2

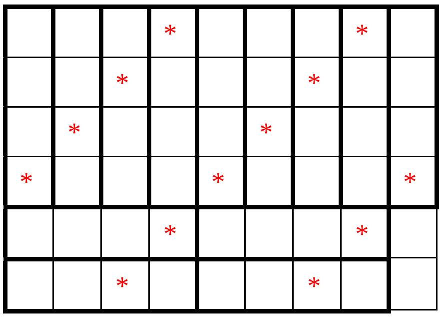
由(i.) (ii.) →最末 b 項和爲 b×p +max{0 , a+b- 4}

當 m≥4 時, $n(B) = n \times \frac{m-b}{4} + b \times p + \max\{0, a+b-4\}$

$$= \frac{n\times m - b(n-4p)}{4} + \max\{0, a+b-4\}$$

$$= \frac{n\times m - a\times b}{4} + \max\{0, a+b-4\}$$

(ii.)將 m×n 的方格矩形以 P_4 切割



圖(10)

可得 $\frac{n\times m - a\times b}{4}$ 個 P_4 圖形與右下角 $a\times b$ 的矩形(如圖(10))

當 m≤3 時 , m = a ,

$\therefore \frac{n\times m - a\times b}{4} = \frac{m\times(n-b)}{4} = m\times\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor$

由於任一擊中集至少含有每個 P_4 中的一個方格

$\therefore\ b(m,n,P_4) \geq m\times\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor$

當 m,n ≥ 4 時，可分爲 ①a+b≤4 ②a+b=5 ③a=b=3 ，三種情形

①a+b≤4

由於 a+b≤4

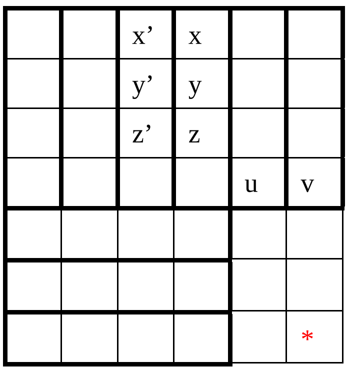
$\therefore\ b(m,n,P_4) \geq \frac{n\times m - a\times b}{4} = \frac{n\times m - a\times b}{4} + \max\{0, a+b-4\}$

($\because$ 此時 a+b- 4≤0)

②a+b=5 時，a,b 必爲 3,2 (可互換)

由於 a+b=5

$\therefore\ b(m,n,P_4) \geq \frac{n\times m - a\times b}{4}$ 但若 $b(m,n,P_4) = \frac{n\times m - a\times b}{4}$,會出現矛盾，如圖(11)



圖(11)

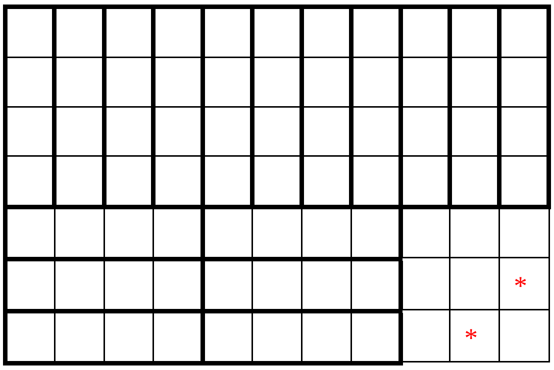
$\because\ b(m,n,P_4) = \frac{n\times m - a\times b}{4}$

∴ 每個 P_4 圖形各含一個 B 的方格，而 3×2 的矩形不含 B 中方格

⇒ 此時 3×2 矩形上方的 2 個 P_4 圖形之唯一 B 方格必在 u,v 的位置，如此一來，x , x' 之間、y , y'之間、z , z'之間必各含有一個在 B 中的方格，與每個 P_4 圖形只含有唯一一個 B 的方格矛盾。

故必須增加一個方格" * "

$\therefore$ 事實上，$b(m,n,P_4) \geq \dfrac{n\times m-a\times b}{4}+1=\dfrac{n\times m-a\times b}{4}+\max\{0\,,\,a+b-4\}$



圖(12)

③a=b=3，與②同理，只是此時所需增加 B 中的方格數爲 2 (如圖(12))

$\therefore\ b(m,n,P_4) \geq \dfrac{n\times m-a\times b}{4}+2=\dfrac{n\times m-a\times b}{4}+\max\{0\,,\,a+b-4\}$

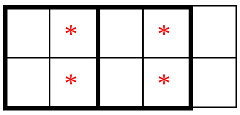
由(i.) (ii.) →當 $m\leq 3$ 時，$b(m,n,P_4)=m\times\left[\dfrac{n}{4}\right]$

當 $m,n\geq 4$ 時，$b(m,n,P_4)=\dfrac{n\times m-a\times b}{4}+\max\{0\,,\,a+b-4\}$

4. $b(m,n,L_2)$

(1.)當海域爲 m×n 的方形矩形，戰艦形狀爲 L_2

(i.)分三類：



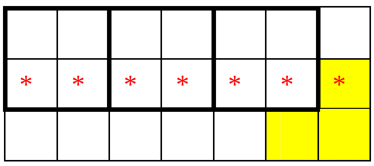
圖(13)

①m=2

$B=\{(i\,,\,j)\mid 1\leq i\leq 2\,,\,1\leq j\leq n\,,\,j$ 爲偶數$\}$

是一個擊中集，如圖(13)

$\therefore\ b(2,n,L_2)\leq B(n)=2\times\left[\dfrac{n}{2}\right]$



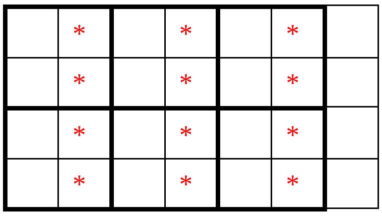
圖(14)

②m=3

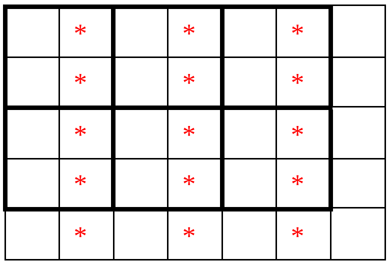
$B=\{(i\,,\,j)\mid 1\leq i\leq 3\,,\,1\leq j\leq n\,,\,i=2\}$

是一個 L_2 的擊中集，如圖(14)

$\therefore\ b(3,n,L_2)\leq B(n)=n$



圖(15)



圖(16)

③m , n > 3

B={(i , j)｜1≤i≤m , 1≤j≤n , j 為偶數}

是一個擊中集，如圖(15) ,圖(16)

∴ $b(m,n,L_2) = b(n,m,L_2) \leq m \times \left[\frac{n}{2}\right]$

(ii.)將 m×n 的方格矩形以 L_2 分割，分三種討論

①m=2

令 n = 2p+a , 0≤a≤1

可得到 $p = \left[\frac{n}{2}\right]$ 個 S_2 圖形，如圖(13)，B 包含任意一個 S_2 圖形中至少 2 個方格

∴ $b(2,n,L_2) \geq 2 \times \left[\frac{n}{2}\right]$

②m=3

令 n = 2p+a , 0≤a≤1

可得到 $p = \left[\frac{n}{2}\right]$ 個 S_2 圖形，會剩下一些方格，B 包含任意一個 S_2 圖形中至少 2 個方格，但當 a = 1 時，如圖(14)，會多增加一個 L_2 圖形

∴ 要再增加一個方格

⇒ 當 a = 0 , $b(3,n,L_2) \geq 2p = n$

⇒ 當 a = 1 , $b(3,n,L_2) \geq 2p+1 = n$

③m , n > 3

此時要分 (a) m,n 中，至少一個為偶數 (b)m,n 均為奇數

(a) ∵ m,n 中至少有一個為偶數(不妨設 n 為偶數)，∴ 不會出現如圖(14)的圖形，共分割出 $\left[\frac{m}{2}\right] \times \frac{n}{2}$ 個 S_2 圖形，又 B 需包含 S_2 圖形中至少 2 個方格

∴ $b(m,n,L_2) \geq \left[\frac{m}{2}\right] \times n$

(b)不妨設 $m \le n$

當 $m=1$ 或 $m=n=3$，容易看出 $b(m,n,L_2) \ge \left[\frac{m}{2}\right] \times n$

現在假設 $m \ge 3$, $n \ge 5$

分割 $m \times n$ 矩形方格爲 $m(n-2)$, $2m$

由數學歸納法證明之

$m < n$ 時，$m \le n-2$

設 $b(m,n-2,L_2) \ge \left[\frac{m}{2}\right] \times (n-2)$ ，由(ii)①知，$b(m,2,L_2) \ge 2\times\left[\frac{m}{2}\right]$

$\therefore$ $b(m,n,L_2) \ge b(m,n-2,L_2) + b(m,2,L_2) \ge \left[\frac{m}{2}\right] \times (n-2) + \left[\frac{m}{2}\right]^2 = n\times\left[\frac{m}{2}\right]$

當 m=n 時，

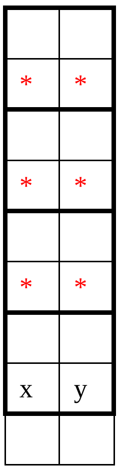
由(ii)①知，$b(m,2,L_2) \ge 2\times\left[\frac{m}{2}\right]$

$\therefore$ $b(m,n,L_2) \ge \left[\frac{m-2}{2}\right]\times m + \left[\frac{m}{2}\right]\times 2 = \left[\frac{m}{2}\right]\times m - 1$

但若 $b(m,2,L_2) = \left[\frac{m}{2}\right]\times m - 1$

$\Rightarrow b(m,2,L_2) = 2\times\left[\frac{m}{2}\right]$ ，將 $m\times 2$ 由上到下分成$\left[\frac{m}{2}\right]$ 個 S_2 圖形與一個 P_2 圖形，

在每個最佳 $m\times n$ 擊中集 B 中，每個 S_2 恰含 B 中的方格，



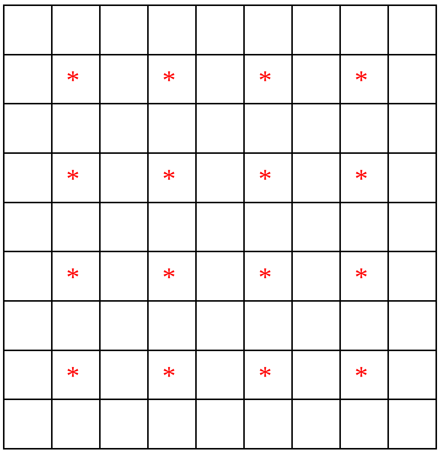
圖(17)

$\therefore$ 其上方 2 格(如圖(17))，x,y 和 ”*” 的位置，B 含有 $m\times n$ 最後一行中的$\left[\frac{m}{2}\right]$格，再由前述結論，B 含有 m(n-1)中最少$\left[\frac{m}{2}\right]\times(n-1)$格

$\therefore$ $b(m,n,L_2) = n(B) = \left[\frac{m}{2}\right]\times(n-1) + \left[\frac{m}{2}\right] = \left[\frac{m}{2}\right]\times n$

得到矛盾$\Rightarrow$ $b(m,n,L_2) = \left[\frac{m}{2}\right]\times n$

5. b(n,n,Z_2)& b(m,n,Z_2)


圖(18)

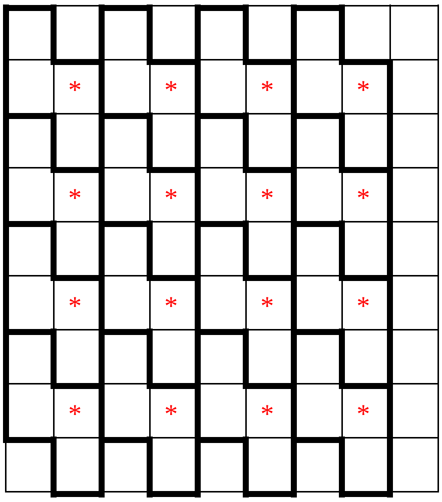
(1.)當海域爲 n×n 的矩形方形，戰艦形狀爲 Z_2

(i.) B={(i , j)｜1≤i, j≤n， i,j 均爲 2 的倍數}

爲 Z_2 的一個擊中集(如圖(8))

$$n(B)=\left[\frac{n}{2}\right]^2$$

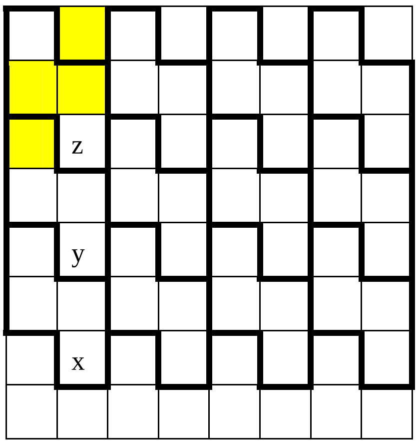
$$b(n,n,Z_2) \le n(B) = \left[\frac{n}{2}\right]^2$$


圖(19)

(ii.) ①將 n×n (n 爲奇數)的方格矩形以 Z_2 切割，

每兩行會有 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 個 Z_2 ，則總共有 $\left[\frac{n}{2}\right] \times \left[\frac{n}{2}\right]$

個 Z_2。 (如圖(19))



圖(20)

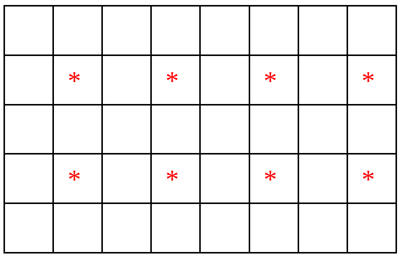
②將 n×n (n 爲偶數)的方格矩形以 Z_2 切割，每兩行會有 $\left[\frac{n}{2}\right]$ -1 個 Z_2，但是在未分割的區域若不含有 B 中的方格，則 x,y,z 必∈B，但是在上方的有一個黃色區域可以爲不被打中的 Z_2，所以矛盾。故在未被分割的區域有一顆子彈存在。

則總共有 $\left[\frac{n}{2}\right] \times \left[\frac{n}{2}\right]$ 個 Z_2 (如圖(20))

由①②得知：$b(n,n,Z_2)\ \geq\ n(B)=\left[\frac{n}{2}\right]^2$

由(i.) (ii.) $\rightarrow b(n,n,Z_2)=\left[\frac{n}{2}\right]^2$

(2.)推廣到 m×n 的方格矩形



圖(21)

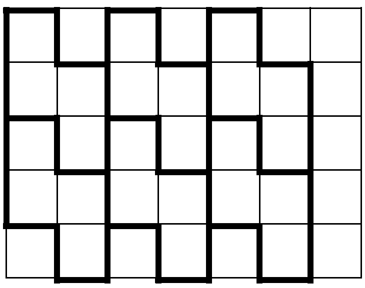
(i.)同(1)

$B=\{(i\ ,\ j)\mid 1\leq j\leq n\ ,\ 1\leq i\leq m\ ,$ i,j 均為 2 的倍數$\}$

為 S_2 的一個擊中集 (如圖(21))

$n(B)=\left[\frac{n}{2}\right]\times\left[\frac{m}{2}\right]$

$b(m,n,Z_2)\ \leq\ n(B)=\left[\frac{n}{2}\right]\times\left[\frac{m}{2}\right]$



圖(22)

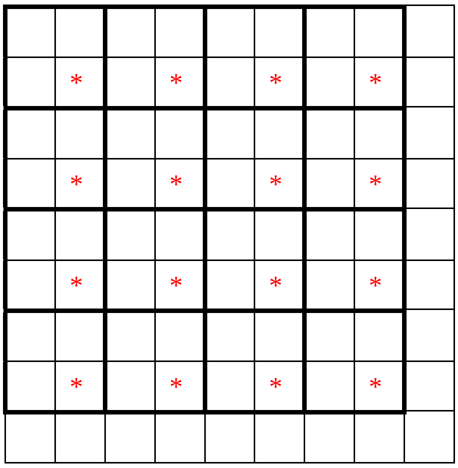
(ii.) 將 m×n 的方格矩形以 Z_2 切割，共可得 $\left[\frac{n}{2}\right]\times\left[\frac{m}{2}\right]$ 個 S_2 圖形(如圖(22))，與(1.)(ii.)同理

$\therefore b(m,n,Z_2)\geq\left[\frac{n}{2}\right]\times\left[\frac{m}{2}\right]$

由(i.) (ii.) $\rightarrow b(m,n,Z_2)=\left[\frac{n}{2}\right]\times\left[\frac{m}{2}\right]$

8. b(n,n,S_2)& b(m,n,S_2)

(1.) 當海域為 n×n 的矩形方形，戰艦形狀為 S_2



圖(23)

(i.) B={(i , j) ∣ 1≦i, j≦n， i,j 均為 2 的倍數}

為 S_2 的一個擊中集(如圖(23))

$$n(B)=\left[\frac{n}{2}\right]^2$$

$$b(n,n,S_2) \leq n(B)=\left[\frac{n}{2}\right]^2$$

(ii.)將 n×n 的方格矩形以 S_2 切割，共可得

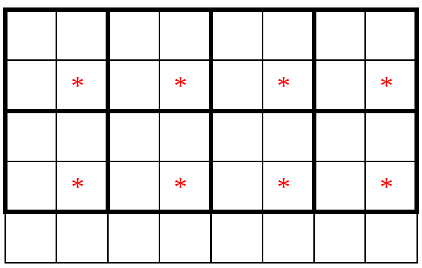
$\left[\frac{n}{2}\right] \times \left[\frac{n}{2}\right]$ 個 S_2 圖形，又任一個 S_2 擊中集必包含每個 S_2 圖形的至少一個方格。

$$\therefore\ b(n,n,S_2) \geq \left[\frac{n}{2}\right]^2$$

由(i.) (ii.) $\rightarrow b(n,n,S_2)=\left[\frac{n}{2}\right]^2$

(2.) 推廣到 m×n 的方格矩形

(i.)同(1)



B={(i , j) ∣ 1≦j≦n , 1≦i≦m， i,j 均為 2 的倍數}

為 S_2 的一個擊中集

$$n(B)=\left[\frac{n}{2}\right] \times \left[\frac{m}{2}\right]$$

$$b(m,n,S_2) \leq n(B)=\left[\frac{n}{2}\right] \times \left[\frac{m}{2}\right]$$

(ii.) 將 m×n 的方格矩形以 S_2 切割，共可得$\left[\frac{n}{2}\right] \times \left[\frac{m}{2}\right]$ 個 S_2 圖形

與(1.)(ii.)同理

$\therefore b(m,n,S_2) \geq \left[\frac{n}{2}\right] \times \left[\frac{m}{2}\right]$

由(i.) (ii.) $\rightarrow b(m,n,S_2) = \left[\frac{n}{2}\right] \times \left[\frac{m}{2}\right]$

(3.)再推廣至 S_r：

與上述同理：

①n×n 的方格矩形

$n(B) = \left[\frac{n}{r}\right]$ 且可在 n×n 方格矩形中可劃分出$\left[\frac{n}{r}\right]^2$個 S_r 圖形

$\Rightarrow b(n,n,S_r) = \left[\frac{n}{r}\right]^2$

②m×n 的方格矩形

$n(B) = \left[\frac{n}{r}\right] \times \left[\frac{m}{r}\right]$ 且可在 m×n 方格矩形中可劃分出$\left[\frac{n}{r}\right] \times \left[\frac{m}{r}\right]$ 個 S_r 圖形

$\therefore b(m,n,S_r) = \left[\frac{n}{r}\right] \times \left[\frac{m}{r}\right]$

陸. 結果

1. $b(n,n,P_2) = \left[\frac{n^2}{2}\right]$, $b(m,n,P_2) = \left[\frac{mn}{2}\right]$

2. $b(n,n,P_3) = \left[\frac{n^2}{3}\right]$, $b(m,n,P_3) = \left[\frac{mn}{3}\right]$

3. $b(n,n,P_4)$：當 $a = 0 , 1 , 2$ ，$b(m,n,P_4) = \frac{n^2 - a^2}{4}$

當 $a = 3$，$b(m,n,P_4) = \frac{n^2 - a^2}{4} + 2$

$b(m,n,P_4)$：當 $m \leq 3$ 時，$b(m,n,P_4) = m \times \left[\frac{n}{4}\right]$

當 $m,n \geq 4$ 時，$b(m,n,P_4) = \frac{n \times m - a \times b}{4} + \max\{0 , a+b-4\}$

4. $b(m,n,L_2) = \left[\frac{m}{2}\right] \times n$

7. $b(n,n,Z_2) = \left[\frac{n}{2}\right]^2$, $b(m,n,Z_2) = \left[\frac{n}{2}\right] \times \left[\frac{m}{2}\right]$

8.(1.) $b(n,n,S_2) = \left[\frac{n}{2}\right]^2$, $b(m,n,S_2) = \left[\frac{n}{2}\right] \times \left[\frac{m}{2}\right]$ ，

(2.) $b(n,n,S_r) = \left[\frac{n}{r}\right]^2$, $b(m,n,S_r) = \left[\frac{n}{r}\right] \times \left[\frac{m}{r}\right]$

柒. 討論

以上皆是固定形狀的戰艦，而當不知道對方的形狀或戰艦可以變形時，要確定打到的條件又是什麼呢？

定義：A_r 為面積為 r 個方格任意組成的戰艦。

探討 $b(n,n,A_2)$, $b(n,n,A_3)$, $b(n,n,A_4)$的公式解法

1. 當海域為 n×n 的方形矩形，戰艦形狀為 A_2，則 $b(n,n,A_2)$=？

方格數為 2 格的戰艦，只有唯一的形狀 P_2，

故可知 $b(n,n,A_2)= b(n,n,P_2)= \left[\dfrac{n^2}{2}\right]$

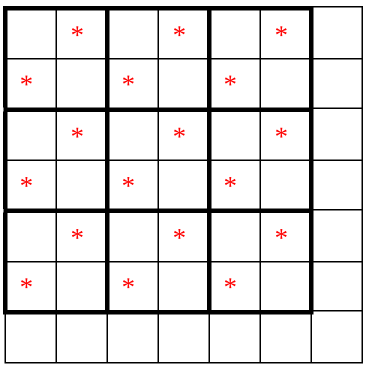
2. 當海域為 n×n 的方形矩形，戰艦形狀為 A_3，則 $b(n,n,A_3)$=？

方格數為 3 格的戰艦，有 2 種形狀 P_3和 L_2。

(i.)無論是 P_3 或 L_1 必含有 P_2 的方格，故可推出

$$b(n,n,A_3)\le b(n,n,P_2)= \left[\frac{n^2}{2}\right]$$

(ii.)令 $n=2p+a$, $0\le a\le 1$



此時 n×n 方格矩形中 S_2 個數為$\left[\dfrac{n}{2}\right] \times \left[\dfrac{n}{2}\right]$ ，

又外圍會剩下 an+a(n-1)=a(2n-1)個方格(如左圖)，A_3的擊中集須含有 S_2方格裡的其中兩格，又因外圈的每個 S_2必有 1 個方格與外圍相連，故外圍的 a(2n-1)須每 2 格就得有一個擊中格。

$$\therefore b(n,n,A_3) \ge \left[\frac{n}{2}\right]\times\left[\frac{n}{2}\right]\times 2+\frac{a(2n-1)}{2} = \left[\frac{n^2}{2}\right]$$

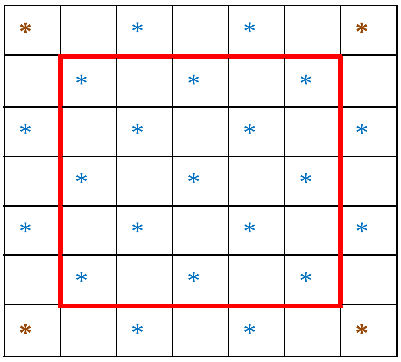
(可由 n=2k+1,n=2k 代入證出)

由(i.) (ii.) $\rightarrow$ $b(n,n,A_3)= \left[\dfrac{n^2}{2}\right]$

3. 當海域爲 n×n 的方形矩形，戰艦形狀爲 A_4，則 $b(n,n,A_4)$=？

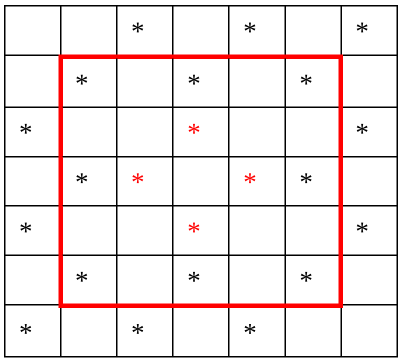
方格數爲 4 格的戰艦，有 5 種形狀 S_2、L_3、P_4、T_1、Z_2。

以下是有觀察法算出 n=6k+1 和 n=6k+3 時 $b(n,n,A_4)$=？

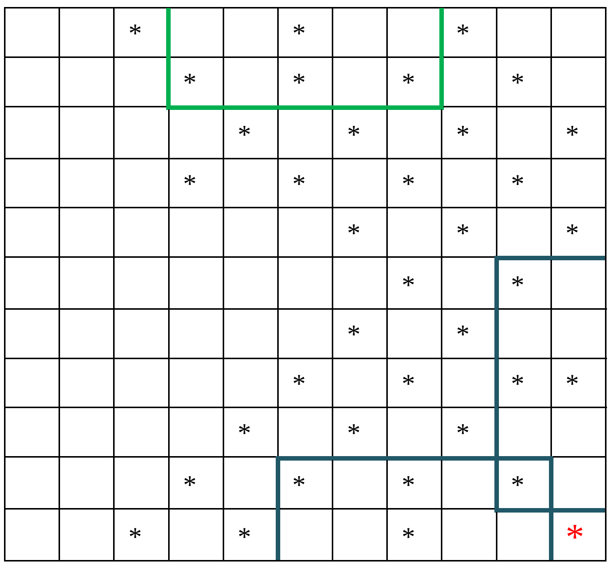


一開始將子彈打在 $B=\{(i,j) \mid 1\leq i, j\leq n$ 且 $i+j\equiv 0 \pmod 2\}$ ，發現咖啡色的子彈可以視爲多餘的，故四角的子彈數可以減去。

若一開始打在 $B=\{(i,j) \mid 1\leq i, j\leq n$ 且 $i+j\equiv 1 \pmod 2\}$ 則無發現多餘的子彈



除了四角外紅色的 S_5 內亦可以移動後少 1 顆子彈而達成效果，切記 S_5 的四角不能與海域的四角重合，否則四角的子彈數不能扣除，其餘的無法移動，否則必須再補子彈。



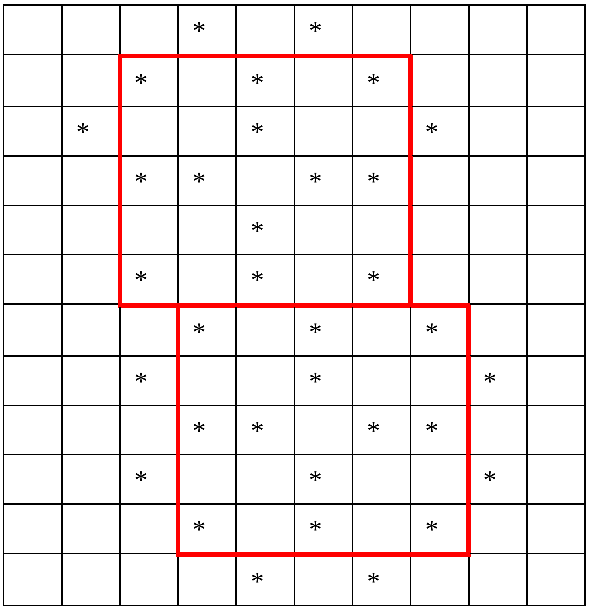
先以上方的綠色方框來看，是一個 5x2 的方格，但因靠壁也可因移動後少 1 顆子彈。

右下方的藍色方框，可以藉由補角落而讓方框內的子彈移動後各少掉 1 個。

做法：先將子彈打在 B={(i , j) | 1≤i , j≤n 且 i+j≡0 (mod 2)}，然後減去四角的子彈數，再減去方框數(一個方框少一顆子彈)，即為 b(n,n,A_4)。
由於外圍只需 10 個方格就能少 1 顆子彈(內部則須 25 格)，故從外圍畫起。

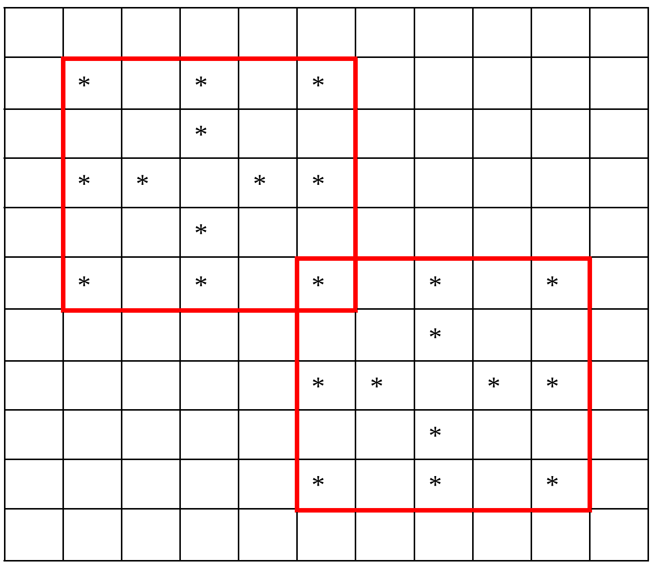
畫法:由於要達成擊中的目的，兩方框的畫法必須遵循以下幾種。

畫法 1：兩方框交錯，例如：



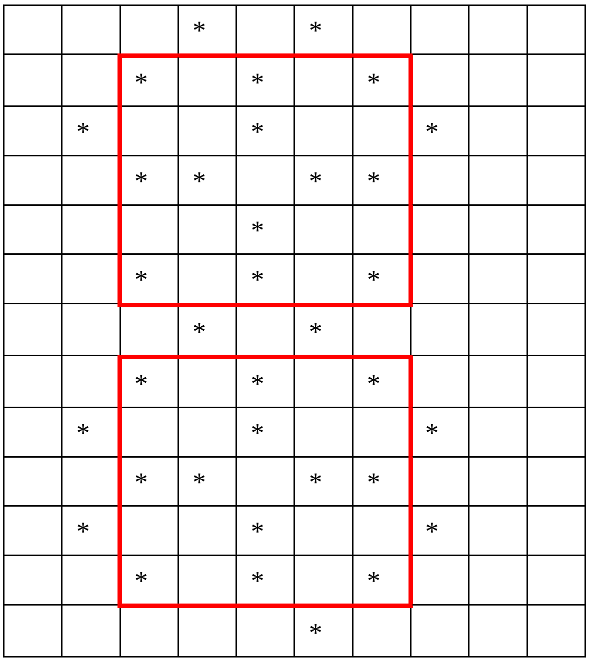
藉由交錯來
互補對方所
需的方格

畫法 2：共用同一角，例如：



藉由共用以
減少所需的
方格達成相
同目的

畫法 3：兩方格不交錯且相隔 1 行，例如：

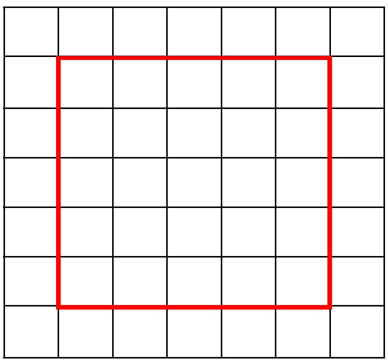


藉由共同使用所不足的部分以減少所需方格

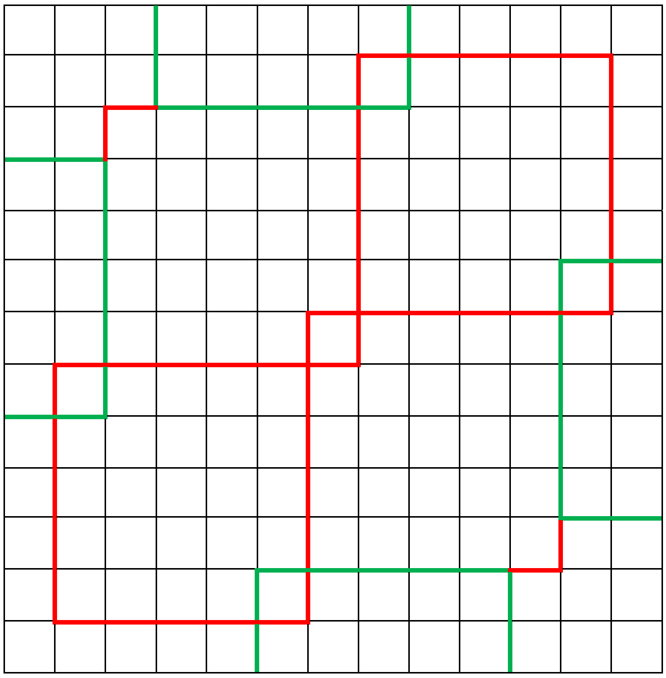
※方框的頂點必須在 B={(i , j) | 1≤i , j≤n 且 i+j≡0 (mod 2)} (除海域四角外)

當 n=6k+1 時

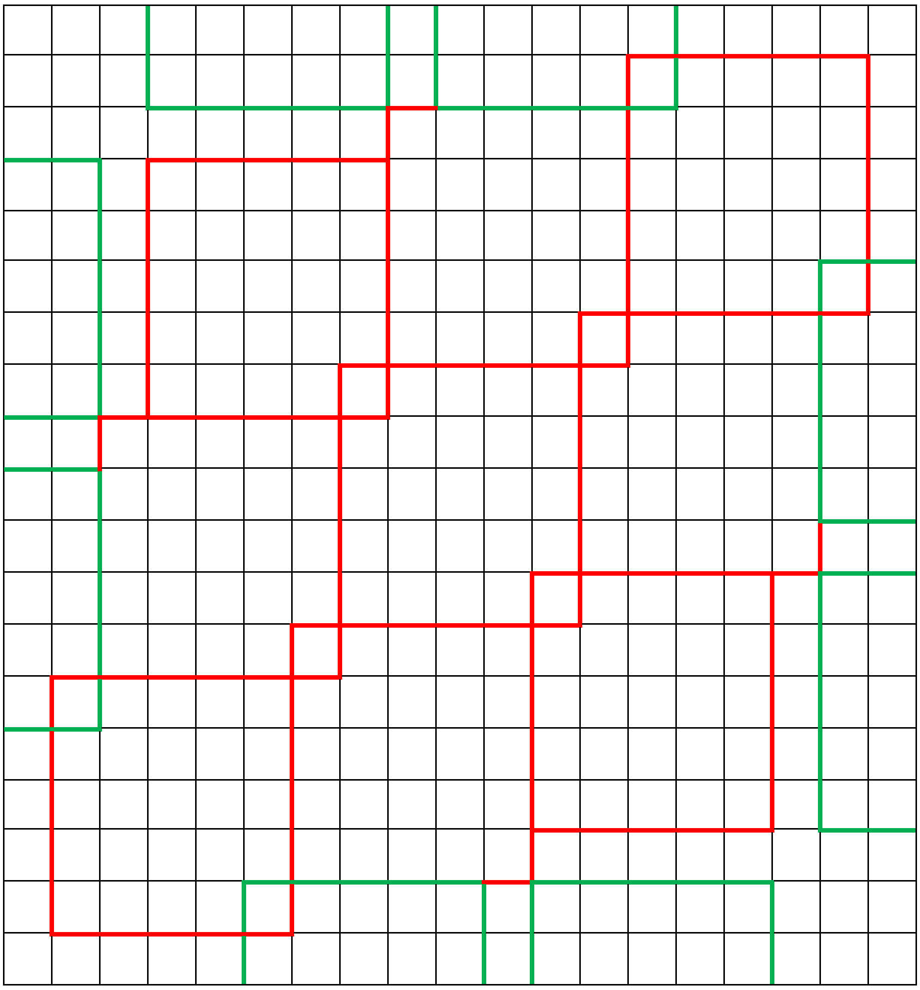
外圈一共可以放 4(k-1)= $\frac{2n-14}{3}$，而內圈必須將方框放的最密集，下列幾張圖來觀察



7×7



13×13

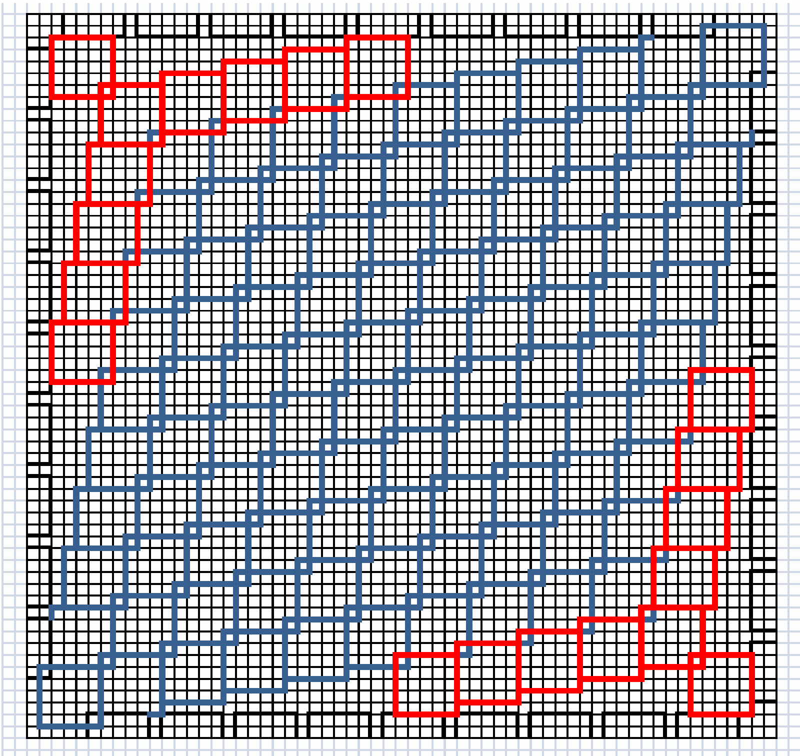


19×19

以左下到右上的對角線來看，它是不同方框內的格數 1+5+1+5+……+5+1

，右邊長爲 6k+1 故可以剛好排滿。由左下延對角線向上遞增方框可以排 $\left[\frac{n}{6}\right]^2$ 個

方框。但是左上和右下會多一些空格(最右下的方框邊離黑方框 k-2 個方格)，隨著 k-2 的增加，又可放幾個方框。如下圖：



當藍色排完後，剩餘的方格可以再放方框。由對角線來看，可以多放

$\left[\frac{\left[\frac{n-5}{4}\right]}{2}\right] \times 2 - \left[\frac{n-1}{6}\right]$ 個紅框，對角線的隔壁可以再多放 $\left[\frac{\left[\frac{n-5-12}{4}\right]}{2}\right]$ -

($\left[\frac{n-1}{6}\right]$ -1) , $\left[\frac{\left[\frac{n-5-12\times 2}{4}\right]}{2}\right]$ - ($\left[\frac{n-1}{6}\right]$ - 2) ,……(直到多放的方格最接近 0)。

所有的紅框爲 2{ $\sum_{i=0}\left(\left[\frac{\left[\frac{n-5-12\times 2}{4}\right]}{2}\right]+i\right) - \left[\frac{n-1}{6}\right]$ } − ($\left[\frac{\left[\frac{n-5}{4}\right]}{2}\right] \times 2 - \left[\frac{n-1}{6}\right]$)

(加至 $\left[\frac{\left[\frac{n-5-12\times 2}{4}\right]}{2}\right]+i > 0$)

故當 n=6k+1 時

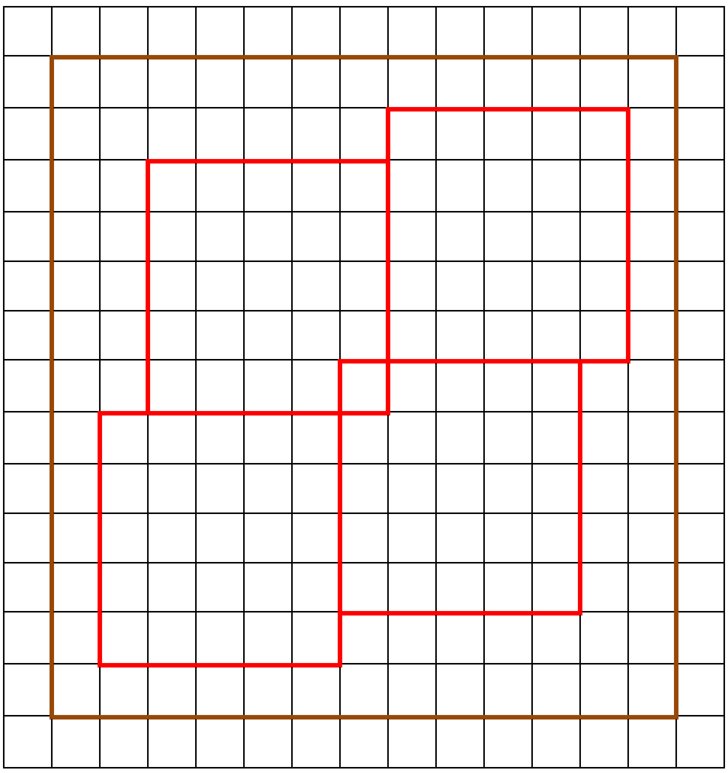
且 $1<k<6$ 時, $b(n,n,A_4) = \left[\frac{n^2}{2}\right] +1 - 4 - \frac{2n-14}{3} - \left[\frac{n}{6}\right]^2 = \left[\frac{n^2}{2}\right] - \frac{2n-5}{3} - \left[\frac{n}{6}\right]^2$

$k \leq 6$ 時, $b(n,n,A_4) = \left[\frac{n^2}{2}\right] +1 - 4 - \frac{2n-14}{3} - \left[\frac{n}{6}\right]^2 - 2\{ \sum_{i=0} \left(\left[\frac{\left[\frac{n-5-12\times 2}{4}\right]}{2}\right] + i \right)$

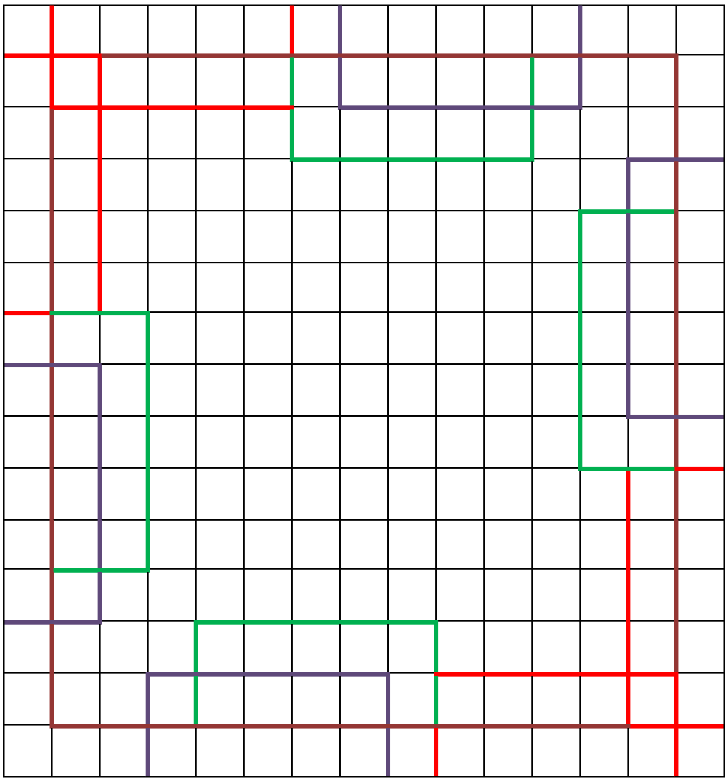
$- \left[\frac{n-1}{6}\right] \} + \left(\left[\frac{\left[\frac{n-5}{4}\right]}{2}\right] \times 2 - \left[\frac{n-1}{6}\right] \right)$, 且 $\left(\left[\frac{n-4+1+5(i-1)}{4}\right] + 1 - i > 0 \right)$

當 n=6k+3 時

我們採用 n=6k+1 的外圍多加一圈，例如：



由 6k+1 變成 6k+3 內部不會發生改變，如果有改變，也只是和外面的 5x2 合併。



15×15

一開始的 6k+1 的外部爲綠框，擴展到 6k+3 時爲紫框，但是會再多增加紅色框。
故由內部不變，外部多紅框來推：(紅框減少子彈量：框的數量-海域頂點)
當 $n=6k+3$ 時 $b(n,n,A_4) = b(n-2,n-2, A_4) + 2$

目前 A_4 只有推到這裡

捌. 未來展望

1. 推導到 $b(m,n,L_r)$的公式解法
2. 推導到 $b(m,n,P_r)$的公式解法
3. 推導到 $b(m,n,Z_r)$的公式解法
4. 堆導到 $b(m,n,A_4)$的公式解法

5.推廣到立體並且除了原來戰艦的應用外，與生活結合

玖. 參考資料

1. 400 個最新世界著名數學最值問題
2. 2009 年 TRML 思考賽