宜蘭高中 98 學年度學生數理自然科學專題研究

題目：

Ma+Mb+Mc 為完全平方數條件之研究

指導老師：

沈碧照

學生：

張鈞旻

莊偉廷

許舒普

$m^a + m^b + m^c$ 爲完全平方數的條件之討論

指導老師: 沈碧照

研究學生: 21313 張鈞旻

21314 莊偉廷

21315 許舒普

摘要

研究 $m^a \pm m^b$ 、 $m^a \pm m^b \pm m^c$ 爲完全平方數的條件

壹、 研究動機

在上數學課時，老師出了一道有趣的題目:「求 $2^8+2^{11}+2^n$ 爲完全平方時，n 的值爲何?」在解這個題目的過程中，我們聯想到是否能研究出「 $m^a \pm m^b$ 」、「 $m^a \pm m^b \pm m^c$ 」爲完全平方數時的條件爲何? 在深入研究後，發現這個貌似簡單的問題，其實暗藏許多東西，正好最近恰逢科展開始報名，於是我們報名了科展，上述所說，就成了我們的科展題目。

貳、 研究目的

一、 $m^a \pm m^b$ 爲完全平方數的條件
二、 $2^a \pm 2^b \pm 2^c$ 爲完全平方數的條件
三、 $m^a \pm m^b \pm m^c$ 爲完全平方數的條件

參、 研究器材

紙、筆、網路、參考書籍、Word、Maple 13

肆、 研究過程與方法

一、 Catalan's conjecture

比利時數學家卡塔蘭猜想：

$$x^p - y^q = 1$$

若 x, y, p, q 為不等於一的正整數，則其解只有可能為

$(x, y, p, q) = (3,2,2,3)$

$3^2 - 2^3 = 9 - 8 = 1$

卡塔蘭猜想在 19 世紀時被提出，在接下來的 150 年多，並沒有人完整解決這個問題，只有在 x, y, p, q 等於特定值時作討論。

如： $x^2 - y^q = 1$ （ $q \ge 5$， $q \in \mathrm{P}$ ）

但在 2002 年時，終於被一個叫 Preda Mihailescu 的數學家所證出

卡塔蘭猜想以及其證明，對我們在研究 $m^a \pm m^b$ 為完全平方數的條件很有幫助，這個後面會提到。

二、 $m^a \pm m^b$ 為完全平方數的條件

(一) $m^a + m^b$

$a, b, m \in \mathrm{N}$ 且 $a \ge b \ge 1$， $m \ge 2$

假設 $m^a + m^b = k^2$ （ $k \in \mathrm{N}$ ）

1. $a = b$

即 $m^a + m^b = m^a + m^a = 2m^a = k^2$

這邊很明顯，根據標準分解式知，m^a 必含有因數 2 的奇數次方

故得 $a = 2q - 1$，$m = 2^{2r-1} \times s^2$ ($q, r, s \in \mathrm{N}$)

這邊 m 含有完全平方數的因數是可行的

此時， $m^a + m^b = 2m^a = 2 \cdot (2^{2r-1} \times s^2)^{2q-1} = (2^{2rq-r-q+1} \times s^{2q-1})^2$ 為完全平方數

2. a＞b

$m^a + m^b = m^b（m^{a-b}+1）= k^2$

∵ （m^b, $m^{a-b}+1$）= 1

∴ m^b 和 $m^{a-b}+1$ 均為完全平方數

m^b 為完全平方數的條件為： m 為完全平方數或 b 為偶數

但在 m 為完全平方數時，$m^{a-b}+1$ 會是一個完全平方數加 1，不合

故得 b 為正偶數，令 $b = 2n$ （$n \in \mathrm{N}$）

接下來我們只要討論 $m^{a-b}+1$ 為完全平方數的條件即可

這邊我們假設 $m^{a-b}+1 = x^2$ ($x \in \mathrm{N}$ ，$x \ge 2$)

當 $a - b = 1$ 時

$m^{a-b}+1 = x^2$

$m = x^2 - 1$

此時，$b = 2n$、$a = 2n + 1$

$\Rightarrow \quad m^a + m^b = (x^2-1)^{2n+1} + (x^2-1)^{2n} = x^2(x^2-1)^{2n}$ 爲完全平方數

當 $a - b > 1$ 時

$m^{a-b}+1 = x^2$

$x^2 - m^{a-b} = 1$

由卡塔蘭猜想得知，$x = 3$, $m = 2$, $a - b = 3$

此時，$b = 2n$、$a = 2n + 3$

$\Rightarrow \quad m^a + m^b = 2^{2n+3} + 2^{2n} = 9\times 2^{2n} = (3\times 2^n)^2$ 爲完全平方數

綜合以上結論，$m^a + m^b$ 爲完全平方數的條件爲

1. $b = a = 2q - 1$，$m = 2^{2r-1} \times s^2$ ($q, r, s \in \mathrm{N}$)

   此時，$m^a + m^b = (2^{2rq-r-q+1} \times s^{2q-1})^2$

2. $b = 2n$、$a = 2n + 1$ ($n \in \mathrm{N}$)，$m = x^2 - 1$ ($x \in \mathrm{N}$ ，$x \geq 2$)

   此時，$m^a + m^b = (x \times (x^2-1)^n)^2$

3. $b = 2n$、$a = 2n + 3$ ($n \in \mathrm{N}$)，$m = 2$

   此時，$m^a + m^b = (3\times 2^n)^2$

(二) $m^a - m^b$

$a, b, m \in \mathrm{N}$ 且 $a > b \geq 1$， $m \geq 2$

假設 $m^a - m^b = k^2$ ($k \in \mathrm{N}$)

$m^a - m^b = m^b(m^{a-b} - 1) = k^2$

$\because$ $(m^b, m^{a-b} - 1) = 1$

$\therefore$ m^b 和 $m^{a-b} - 1$ 均爲完全平方數

m^b 爲完全平方數的條件爲： m 爲完全平方數或 b 爲偶數

但在 m 爲完全平方數時，$m^{a-b} - 1$ 會是一個完全平方數減 1，不合

故得 b 爲正偶數，令 $b = 2n$ ($n \in \mathrm{N}$)

這邊我們假設 $m^{a-b} - 1 = x^2$ ($x \in \mathrm{N}$)

當 $a - b = 1$ 時

$m^{a-b} - 1 = x^2$

$m = x^2 + 1$

此時，$b = 2n$、$a = 2n + 1$ $\quad \Rightarrow \quad m^a - m^b = (x^2+1)^{2n+1} - (x^2+1)^{2n} = x^2(x^2+1)^{2n}$

當 $a - b > 1$ 時

$m^{a-b} - 1 = x^2$

$m^{a-b} - x^2 = 1$

由卡塔蘭猜想得知，此方程式無解

綜合以上結論，$m^a - m^b$ 爲完全平方數的條件爲

$b = 2n$、$a = 2n + 1$ ($n \in \mathrm{N}$)，$m = x^2 + 1$ ($x \in \mathrm{N}$)，此時 $m^a - m^b = (x \times (x^2+1)^n)^2$

三、$2^a \pm 2^b \pm 2^c$ 爲完全平方數的條件

$a,b,c \in$ N 且 a＞b＞c＞0

$2^a \pm 2^b \pm 2^c = 2^c\left(2^{a-c} \pm 2^{b-c} \pm 1\right)$

若其要爲完全平方數
可知 c 必爲偶數
且 $2^{a-c} \pm 2^{b-c} \pm 1$ 爲完全平方數
假設 $a-c=x$ 、 $b-c=y$ $(x>y)$
這裡分成四段來討論

（一）2^x+2^y+1

由於 2^x+2^y+1 爲奇數
設 $2^x+2^y+1=(2n+1)^2$
$2^x+2^y=4n^2+4n$
$2^{x-2}+2^{y-2}=n(n+1)$
這個方程式用二進位去看的話，可解釋爲：兩個連續正整數(即差 1 的數)之乘積可用二進位表示法寫成一個只含有兩個一的數，如：1001000_2、100010000_2、….
我們先用 Maple 去找，發現了許多使 2^x+2^y+1 爲完全平方數的數對 (x,y)
這邊舉例：$(x,y)=(4,3)$、$(5,4)$、$(6,4)$、$(9,4)$、$(8,5)$、$(10,6)$、$(12,7)$、$(14,8)$、$(16,9)$、$(18,10)$、$(20,11)$….
其實這裡可以發現除了 $(5,4)$、$(9,4)$ 外，其餘的數對 (x,y)有著一些關係
那就是 $x=2y-2$
這其實不難解釋，只要讓 $n=10\ldots0_2$、$n+1=10\ldots01_2$ 即可
如：$100_2\times101_2=10100_2$、$1000_2\times1001_2=1001000_2$ 均只含有兩個 1
根據 $n=10\ldots0_2$、$n+1=10\ldots01_2$
我們假設 $n=2^r$ 、$n+1=2^r+1$
$2^{x-2}+2^{y-2}=n(n+1)=2^{2r}+2^r$
得 $x-2=2r$、$y-2=r$
整理後即可得 $x=2y-2$
此時，$2^x+2^y+1=2^{2y-2}+2\cdot2^{y-1}+1=(2^{y-1}+1)^2$ 爲完全平方數
對於 $(x,y)=(5,4)$、$(9,4)$這兩個特例
在 $(x,y)=(5,4)$ 時
$n=11_2$、$n+1=100_2$
$n(n+1)=1100_2$ 只含有兩個 1
在 $(x,y)=(9,4)$ 時
$n=1011_2$、$n+1=1100_2$
$n(n+1)=10000100_2$

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 & & \times & & 1 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
 & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & 1 & 0 & 1 & 1 & & & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

對於 $2^x + 2^y + 1$ 爲完全平方數的條件，除了 $x = 2y - 2$ 和 $(x, y) = (5, 4)$、$(9, 4)$ 這兩個特例外，我們也懷疑是否存在更多的數對 (x, y) 使命題成立，但我們用 Maple 去找，並沒有找到。

綜合上述，由 $a - c = x$、 $b - c = y$ 知
$2^a + 2^b + 2^c$ 爲完全平方數的條件爲
1. c 爲偶數，$a = 2b - c - 2$
(由於 $a > b > c$，故 $a - b = b - c - 2 > 0 \Rightarrow b - c > 2$)
此時，$2^a + 2^b + 2^c = 2^c\,(2^{b-c-1} + 1)^2$ 爲完全平方數
2. c 爲偶數，$a = c + 5$、$b = c + 4$ 或 $a = c + 9$、$b = c + 4$
此時，$2^a + 2^b + 2^c = 2^c \times 7^2$ 或 $2^a + 2^b + 2^c = 2^c \times 23^2$

（二）$2^x + 2^y - 1$

由於 $2^x + 2^y - 1$ 爲奇數
設 $2^x + 2^y - 1 = (2n + 1)^2 \quad n \in Z$，$n \ge 0$
$2^y\,(2^{x-y} + 1) = 2\,(2n^2 + 2n + 1)$
因爲 $2n^2 + 2n + 1$ 爲奇數
故得 $2^y = 2 \Rightarrow y = 1$
$2^{x-y} + 1 = 2n^2 + 2n + 1$
$2^{x-y} = 2n(n + 1)$ 這裡 n 只有可能等於 1
故 $x - y = 2 \Rightarrow x = 3$
所以，$2^x + 2^y - 1$ 爲完全平方數的條件
只有在 $(x, y) = (3, 1)$ 時成立
綜合上述，由 $a - c = x$、 $b - c = y$ 知
$2^a + 2^b - 2^c$ 爲完全平方數的條件爲
1. c 爲偶數，$a = c + 3$、$b = c + 1$
此時，$2^a + 2^b - 2^c = 2^{c+3} + 2^{c+1} - 2^c = 2^c \times 3^2$ 爲完全平方數

（三）2^x-2^y-1

由於 2^x-2^y-1 為奇數

設 $2^x-2^y-1=(2n+1)^2$ $n\in Z$，$n\geq 0$

$2^y(2^{x-y}-1)=2(2n^2+2n+1)$

因為 $2n^2+2n+1$ 為奇數 ， 故得 $2^y=2\Rightarrow y=1$

$2^{x-y}-1=2n^2+2n+1$

$2^{x-y}=2(n^2+n+1)$

由於 $n^2+n=n(n+1)$ 必為偶數，故 n^2+n+1 為奇數

但 $2(n^2+n+1)$ 又要為 2^{x-y} ，知 $n=0$，故 $x-y=1\Rightarrow x=2$

所以，2^x-2^y-1 為完全平方數的條件

只有在 $(x,y)=(2,1)$ 時成立

綜合上述，由 $a-c=x$、 $b-c=y$ 知

$2^a-2^b-2^c$ 為完全平方數的條件為

1. c 為偶數，$a=c+2$、$b=c+1$

此時，$2^a-2^b-2^c=2^{c+2}-2^{c+1}-2^c=2^c$ 為完全平方數

（四）2^x-2^y+1

由於 2^x-2^y+1 為奇數

設 $2^x-2^y+1=(2n+1)^2$ $n\in Z$，$n\geq 0$

$2^{x-2}-2^{y-2}=n(n+1)$

這個方程式如用二進位表示法去看的話，可解釋為：兩個連續正整數(差 1 的數)之乘積可用二進位寫成一個前半段 1 後半段 0 的數，如：111000_2、11110000_2….

用 Maple 去找後發現有數對 $(x,y)=(4,3)$、$(5,3)$、$(7,3)$、$(15,3)$、$(6,4)$、$(8,5)$、$(10,6)$、$(12,7)$、$(14,8)$ 、$(16,9)$ 、$(18,10)$ 、$(20,11)$…

這邊我們發現除了$(5,3)$、$(7,3)$、$(15,3)$外，其餘的數對 (x,y)有著一些關係，那就是 $x=2y-2$

仔細觀察後，我們發現在 $n=\overbrace{11\cdots1}^{k\text{個}}1_2$, $n+1=1\overbrace{00\cdots0}^{k\text{個}}0_2$ 使其乘積等於一個前半段1後半段0的數。如： $n=111_2$, $n+1=1000_2$ $n(n+1)=111000_2$ (成立)

這邊我們可假設 $n+1=2^r$, $n=2^r-1$

$2^{x-2}-2^{y-2}=n(n+1)=2^{2r}-2^r$

得 $x-2=2r$、$y-2=r$ $\Rightarrow x=2y-2$

此時，$2^x-2^y+1=2^{2y-2}-2\cdot 2^{y-1}+1=(2^{y-1}-1)^2$ 為完全平方數

對於 $(x,y)=(5,3)$、$(7,3)$、$(15,3)$這三個特例

在 $(x,y)=(5,3)$ 時

$n=10_2$, $n+1=11_2$ $n(n+1)=110_2$ (成立)

此時，$2^x-2^y+1=(5)^2$

在 (x , y) = (7 , 3) 時

$n = 101_2$, $n + 1 = 110_2$ $n (n+1) = 11110_2$ (成立)

此時， $2^x - 2^y + 1 = (11)^2$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & 0 & 1 \\
 & \times & 1 & 1 & 0 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

在 (x , y) = (15 , 3) 時

$n = 1011010_2$, $n + 1 = 1011011_2$

$n(n + 1) = 1111111111110_2$ (成立)

此時， $2^x - 2^y + 1 = (181)^2$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & \times & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
 & & & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
 & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & & \\
 & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

我們一樣用 Maple 去找，但除了 $x = 2y - 2$ 和 (x , y) =(5 , 3)、(7 , 3)、(15 , 3) 這三個特例外，並沒有找到。

綜合上述，由 a – c = x、 b – c = y 知

$2^a - 2^b + 2^c$ 爲完全平方數的條件爲

1. c 爲偶數，a = 2b – c – 2

(由於 a＞b＞c，故 a – b = b – c – 2＞0 $\Rightarrow b - c > 2$)

此時，$2^a - 2^b + 2^c = 2^c\,(2^{b-c-1} - 1)^2$

2. c 爲偶數，a = c + 5、b = c + 3 或 a = c + 7、b = c + 3 或 a = c + 15、b = c + 3

 此時，$2^a - 2^b + 2^c = 2^c \times 5^2$ 或 $2^c \times 11^2$ 或 $2^c \times 181^2$

四、 $m^a + m^b + m^c$ 爲完全平方數的條件

$m^a + m^b + m^c$ $(a > b > c)$

$= m^c (m^{a-c} + m^{b-c} + 1)$

這邊同之前所討論的，因爲互質

m^c 和 $m^{a-c} + m^{b-c} + 1$ 均爲完全平方數

只是和之前較爲不同的是

c 不一定要再是 2 倍數

如當 $m = 4$ 時 ， 4^c 是完全平方數

這裡後面會討論到

但不管怎樣，重點還是在於 $m^{a-c} + m^{b-c} + 1$，只要它是完全平方數，就好辦了

假設 $a - c = x$、$b - c = y$

由於此式 $m^x + m^y + 1$ 有點複雜，這邊我們就 m 的幾個值來做討論 ：

(一) $3^x + 3^y + 1$

因爲 $3^x + 3^y + 1$ 爲奇數

設 $3^x + 3^y + 1 = (2t + 1)^2$

$3^y(3^{x-y} + 1) = 4 t (t + 1)$

知 $t , t + 1$ 必有一爲偶數 ， 得 $4 t (t + 1)$ 爲 8 倍數

又因 3^y 爲奇數

故得 $3^{x-y} + 1$ 爲 8 倍數，但這是不可能的

因爲 $3 \equiv 3 \pmod 8$，$3^2 \equiv 1 \pmod 8$，$3^3 \equiv 3 \pmod 8$ ……

得 $3^{x-y} + 1 \equiv 4 \text{ or } 2 \pmod 8$

所以 $3^x + 3^y + 1$ 不可能寫成完全平方數

由這個證明可以知道當 m 爲奇數時

對於 $m \equiv 1 \pmod 8$ 或 $m \equiv 3 \pmod 8$ 或 $m \equiv 5 \pmod 8$

是不可能使得 $m^x + m^y + 1$ 爲完全平方數的

因爲不論是那一個，它們的 $m^2 \equiv 1 \pmod 8$，會形成 1 或 1 , 3 或 1 , 5 的循環

得知 $m \equiv 7 \pmod 8$ 才有可能成立，但由於 $7^{2k} \equiv 1 \pmod 8$ ，故知 $x - y$ 爲奇數

$x - y = (a - c) - (b - c) = a - b$ 爲奇數

雖然說在 $m \equiv 7 \pmod 8$ 時，$m^x + m^y + 1$ 有可能寫成完全平方數，但我們針對 $m = 7 , 15$ 時，以 Maple 13 去試，結果並無發現有 x , y 使其爲完全平方數，可見要找到使 $m^x + m^y + 1$ 爲完全平方數（ m 爲奇數 ）十分困難。

(二)　$4^x + 4^y + 1$

因為 $4^x + 4^y + 1$ 為正奇數

設　$4^x + 4^y + 1 = (2^r t + 1)^2$　$r \in N$　且　t　為正奇數

$4^y (4^{x-y} + 1) = 2^{r+1}\, t\,(2^{r-1}t + 1)$

由於 t、$(2^{r-1}t + 1)$ 均為正奇數

∴　$4^y = 2^{r+1} \Rightarrow 2y = r + 1$

$4^{x-y} + 1 = t\,(2^{2y-2}\, t + 1)$

當 $t = 1$ 時

$2x - 2y = 2y - 2 \Rightarrow x = 2y - 1$，此時　$4^x + 4^y + 1 = 4^{2y-1} + 4^y + 1 = (2^{2y-1} + 1)^2$

當 $t > 1$ 時

$4^{x-y} + 1 = t\,(2^{2y-2}\, t + 1) = 2^{2y-2} t^2 + t$

$t - 1 = 4^{x-y} - 4^{y-1} t^2 = 4^{y-1}\,(4^{x-2y+1} - t^2) = 4^{y-1}\,(2^{x-2y+1} + t)\,(2^{x-2y+1} - t)$

∵　4^{y-1}、$2^{x-2y+1} + t$、$2^{x-2y+1} - t$　均為大於等於 1 的正整數

∴　$t - 1 > 2^{x-2y+1} + t$

很明顯，這是矛盾的，故 $4^x + 4^y + 1$ 為完全平方數的條件為　$x = 2y - 1$

由於 $a - c = x$、$b - c = y$

$a - c = 2(b - c) - 1 \Rightarrow a = 2b - c - 1$

此時　$4^a + 4^b + 4^c = 4^{2b-c-1} + 4^b + 4^c = (2^c \times (2^{2b-2c-1} + 1))^2$

這邊以 $2^x + 2^y + 1$ 為完全平方數的條件來看

1. $x = 2y - 2$　2. $(x, y) = (5,4)$、$(9,4)$

可以得知，x , y 可能同時為 2 倍數，但決不可能同時為 3,4,5,6….的倍數

故 $m = 8, 16, \ldots, 2^n$ 皆不成立

五、　$m^a + m^b - m^c$ 為完全平方數

$m^a + m^b - m^c = m^c(m^{a-c} + m^{b-c} - 1)$　$(a > b > c,\ m > 1)$

∵ $(m^c, m^{a-c} + m^{b-c} - 1) = 1$

∴　m^c, $m^{a-c} + m^{b-c} - 1$ 均為完全平方數

這邊我們就 m 的幾個值來做討論

(一)　$m = 2^n$

前面已證過 $2^{a-c} + 2^{b-c} - 1$ 只有 $2^3 + 2^1 - 1$ 這組解

$\Rightarrow m = 4, 8, \ldots, 2^n$ 皆不成立

(二)　$m = 3$

$3^{a-c} + 3^{b-c} - 1$ 為奇數

可設 $3^{a-c} + 3^{b-c} - 1 = (2t + 1)^2$, $t \in N$　$\Rightarrow 3^{a-c} + 3^{b-c} = 4t^2 + 4t + 2$

令 $t = 3k , 3k + 1 , 3k + 2$ 代入
$4t^2 + 4t + 2$ 均不為 3 的倍數無解
$m = 3$ 不成立 $\Rightarrow$ $m = 3 , 6 , 9 , \ldots$ 皆不成立

(三) $m = 7$

$7^{a-c} + 7^{b-c} - 1$ 為奇數
可設 $7^{a-c} + 7^{b-c} - 1 = (2t+1)^2 , t$ 為自然數
$\Rightarrow$ $7^{a-c} + 7^{b-c} = 4t^2 + 4t + 2$
令 $t = 7k , 7k + 1 , 7k + 2 , 7k + 3 , 7k + 4 , 7k + 5 , 7k + 6$ 代入
發現 $4t^2 + 4t + 2$ 均不為 7 的倍數 $\Rightarrow$ 無解
這邊可以得到在 $m = 7 , 14 , 21 , 28 , \ldots..$ 皆不成立

(四) $m = 5$

$5^{a-c} + 5^{b-c} - 1$ 為奇數
可設 $5^{a-c} + 5^{b-c} - 1 = (2t+1)^2 , t$ 為自然數
$\Rightarrow$ $5^{a-c} + 5^{b-c} = 4t^2 + 4t + 2$
令 $t = 5k , 5k + 1 , 5k + 2 , 5k + 3 , 5k + 4$ 代入
發現 $5k + 1 ,5k + 3$ 代入時為五的倍數，可能有解
$5^{b-c} (5^{a-c}+1) = 4t^2+4t+2=2(2t^2+2t+1)$
此時以 Maple 13 去試
我們只有找到 $5^5 + 5^3 - 1 = (57)^2$ 一組解

六、 $m^a - m^b - m^c$ 為完全平方數

$m^a - m^b - m^c = m^c(m^{a-c} - m^{b-c} - 1)$ $(a > b > c , m > 1)$
$\because (m^c , m^{a-c} - m^{b-c} - 1) = 1$
$\therefore$ $m^c , m^{a-c} - m^{b-c} - 1$ 均為完全平方數
這邊跟 $m^{a-c}+m^{b-c} - 1$ 類似
設 $m^{a-c} - m^{b-c} - 1 = (2n + 1)^2$
$m^{a-c} - m^{b-c} = 4t^2 + 4t + 2$
在 m 為三倍數與七倍數和 $4 , 8 , \ldots , 2^n$ 時，無解
但在 $m = 5$ 時，雖然有可能成立，不過我們以 Maple 13 去試，並沒有發現使其為完全平方數的 x , y 值。

七、 $m^a - m^b + m^c$ 為完全平方數

$m^a - m^b + m^c = m^c(m^{a-c} - m^{b-c} + 1)$ $(a > b > c , m > 1)$
$\because (m^c , m^{a-c} - m^{b-c} + 1) = 1$
$\therefore$ $m^c , m^{a-c} - m^{b-c} + 1$ 均為完全平方數
假設 $a - c = x$、$b - c = y$，這邊我們就 m 的幾個值來做討論 :

(一) $m = 2^n$

這裡跟 $m^x + m^y + 1$ 類似
以 $2^x - 2^y + 1$ 爲完全平方數的條件來看
1. $x = 2y - 2$　　　2. $(x, y) = (4,3)$ 、 $(5,3)$ 、 $(15,3)$
可以得知，x , y 可能同時爲 2 倍數或 3 倍數，但決不可能同時爲 4,5,6….的倍數
故 $m = 16 , 32 , \dots , 2^n$ 皆不成立

在 $4^x - 4^y + 1$ 時，由上述 $2^x - 2^y + 1$ 爲完全平方數的條件 1. $x = 2y - 2$ 知
$x = 2y - 1$ 時，$4^x - 4^y + 1 = 4^{2y-1} - 4^y + 1 = 2^{4y-2} - 2 \cdot 2^{2y-1} + 1 = (2^{2y-1} - 1)^2$

在 $8^x - 8^y + 1$ 時，由上述 $2^x - 2^y + 1$ 爲完全平方數的條件 2. $(x, y) = (15,3)$ 知
$x = 5, y = 1$　此時，$8^x - 8^y + 1 = (181)^2$

(二) m = 3、5

在 $m = 3$ 時
設 $3^x - 3^y + 1 = (2t+1)^2$
$3^y(3^{x-y} - 1) = 4t(t + 1)$
$3^y(3 - 1)(3^{x-y-1} + 3^{x-y-2} + \dots + 1) = 4t(t + 1)$
$3^y(3^{x-y-1} + 3^{x-y-2} + \dots + 1) = 2t(t + 1)$
這邊在 t = 2 時有明顯解，此時 x = 3 , y = 1　$3^x - 3^y + 1 = (5)^2$
同理，在 m = 5 時
設 $5^x - 5^y + 1 = (2t+1)^2$
$5^y(5^{x-y-1} + 5^{x-y-2} + \dots + 1) = t(t + 1)$
這邊在 t = 5 時有明顯解，此時 x = 3 , y = 1　$5^x - 5^y + 1 = (11)^2$
我們一樣在這邊用 Maple 13 去尋找，針對 m = 3、5 時的 x , y 值，不過並沒有找到。

伍、 研究結果

一、 找出 $m^a \pm m^b$ 爲完全平方數的條件

(一) $m^a + m^b$ 爲完全平方數的條件
1. $b = a = 2q - 1$，$m = 2^{2r-1} \times s^2$ ($q, r, s \in \mathbb{N}$)
　此時，$m^a + m^b = (2^{2rq-r-q+1} \times s^{2q-1})^2$
2. $b = 2n$、$a = 2n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$)，$m = x^2 - 1$ ($x \in \mathbb{N}$ ，$x \ge 2$)
　此時，$m^a + m^b = (x \times (x^2 - 1)^n)^2$
3. $b = 2n$、$a = 2n + 3$ ($n \in \mathbb{N}$)，$m = 2$
　此時，$m^a + m^b = (3 \times 2^n)^2$

(二) $m^a - m^b$ 爲完全平方數的條件

1. $b = 2n$、$a = 2n + 1$ ($n \in N$)，$m = x^2 + 1$ ($x \in N$)，此時 $m^a - m^b = (x \times (x^2+1)^n)^2$

二、 找出 $2^a \pm 2^b \pm 2^c$ 爲完全平方數的條件

（一）$2^a + 2^b + 2^c$ 爲完全平方數

1. c 爲偶數，$a = 2b - c - 2$ $(b - c > 2)$

   此時，$2^a + 2^b + 2^c = 2^c (2^{b-c-1} + 1)^2$ 爲完全平方數

2. c 爲偶數，$a = c + 5$、$b = c + 4$ 或 $a = c + 9$、$b = c + 4$

   此時，$2^a + 2^b + 2^c = 2^c \times 7^2$ 或 $2^c \times 23^2$

（二）$2^a + 2^b - 2^c$ 爲完全平方數

1. c 爲偶數，$a = c + 3$、$b = c + 1$

   此時，$2^a + 2^b - 2^c = 2^{c+3} + 2^{c+1} - 2^c = 2^c \times 3^2$ 爲完全平方數

（三）$2^a - 2^b - 2^c$ 爲完全平方數

1. c 爲偶數，$a = c + 2$、$b = c + 1$

   此時，$2^a - 2^b - 2^c = 2^{c+2} - 2^{c+1} - 2^c = 2^c$ 爲完全平方數

（四）$2^a - 2^b + 2^c$ 爲完全平方數

1. c 爲偶數，$a = 2b - c - 2$ $(b - c > 2)$

   此時，$2^a - 2^b + 2^c = 2^c (2^{b-c-1} - 1)^2$

2. c 爲偶數，$a = c + 5$、$b = c + 3$ 或 $a = c + 7$、$b = c + 3$ 或 $a = c + 15$、$b = c + 3$

   此時，$2^a - 2^b + 2^c = 2^c \times 5^2$ 或 $2^c \times 11^2$ 或 $2^c \times 181^2$

三、對 $m^a + m^b + m^c$ 爲完全平方數的條件做討論（$m > 2$）

（一）m 爲奇數時，$m \equiv 7 \pmod 8$ 才有可能成立

　　此時，$a - b$ 爲奇數

（二）$m = 4$ 時，即 $4^a + 4^b + 4^c$ 爲完全平方數時需 $a = 2b - c - 1$

　　此時 $4^a + 4^b + 4^c = 4^{2b-c-1} + 4^b + 4^c = (2^c \times (2^{2b-2c-1} + 1))^2$

（三）對於 $m = 8, 16, \ldots, 2^n$ 皆不成立

四、對 $m^a + m^b - m^c$ 爲完全平方數的條件做討論

（一）對於 $m = 4, 8, \ldots, 2^n$ 和 3 倍數、7 倍數 皆不成立

（二）$m = 5$ 時，c 爲偶數，$a = c + 5$, $b = c + 3$

　　此時 $5^a - 5^b + 5^c = 5^c \times 57^2$

五、對 $m^a - m^b - m^c$ 爲完全平方數的條件做討論

（一）對於 $m = 4, 8, \ldots, 2^n$ 和 3 倍數、7 倍數 皆不成立

六、對 $m^a - m^b + m^c$ 爲完全平方數的條件做討論

（一）m = 4 時，即 $4^a - 4^b + 4^c$ 爲完全平方數時需 $a = 2b - c - 1$

此時 $4^a - 4^b + 4^c = 4^{2b-c-1} - 4^b + 4^c = (2^c \times (2^{2b-2c-1} - 1))^2$

（二）m = 8 時，即 $8^a - 8^b + 8^c$ 爲完全平方數時需 $a = c + 5$, $b = c + 1$ ，c 爲偶數

此時 $8^a - 8^b + 8^c = 8^c (181)^2$

（三）m = 16 , 32 , … , 2^n 皆不成立

（四）m = 3 或 5 時，皆爲 $a = c + 3$, $b = c + 1$ ，c 爲偶數

此時 $3^a - 3^b + 3^c = 3^c (5)^2$; $5^a - 5^b + 5^c = 5^c (11)^2$

陸、 討論

一、 $m^a \pm m^b$ 爲完全平方數的條件

對於 $m^a \pm m^b$ 爲完全平方數的條件的證明，主要是根據卡塔蘭猜想，但由於卡塔蘭猜想的證明太長，所以這邊並沒有列舉出。

二、 $2^a \pm 2^b \pm 2^c$ 爲完全平方數的條件

對於 (一) $2^x + 2^y + 1$、 (四) $2^x - 2^y + 1$ 所給的證明是不完整的，這裡還值得我們深入去研究。

三、 $m^a \pm m^b \pm m^c$ 爲完全平方數的條件

由於上式有點複雜，所以我們並沒有直接去討論 m 以及 a、b、c 的一般情況，而是以 m 爲 3、4…代入特定値來做討論，經過討論後，我們發現 m 爲大部份的數時，其實是不可能的，相信這可以幫助我們的研究。

柒、 結論

在研究這個主題時，我們發現，其實數論的證明並不是很簡單，在研究 $m^a \pm m^b$ 爲完全平方數的條件時，發現居然可以用卡塔蘭猜想(其實應該叫定理)來說明，剛開始其實沒有想到，我們的研究竟然會和卡塔蘭猜想如此關係密切，而對於 $m^a \pm m^b \pm m^c$ 爲完全平方數的條件，這邊主要是用 Maple 13 去找，證明的部份並不多，其實還需要深入去研究，這是個令人沉醉的挑戰，也相信裡面會有一些奇妙的結果。

捌、 參考資料及其它

1. http://www.math.leidenuniv.nl/~jdaems/scriptie/Catalan.pdf
2. 名人趣題妙解(九章出版社)
3. 通過問題學解題(九章出版社)