宜蘭高中 98 學年度學生數理自然科學專題研究

題目：

雜級數之探討

指導老師：

楊明雯

學生：

陳益昇

游宜倫

數學專題期末報告

對 $1^m+2^m+3^m+4^m+\cdots\cdots n^m$ 的探討

一、緣起

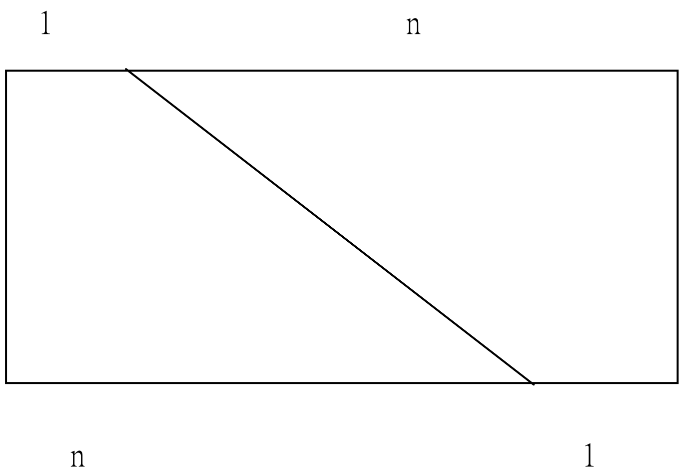
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

以上公式是由低次方推向高次方的,雖然清晰但推導繁複(省略),且結果沒有明顯的關聯。其中,最簡單的情況是 1+2+3+4……+n 我們不妨把它畫成一個梯形

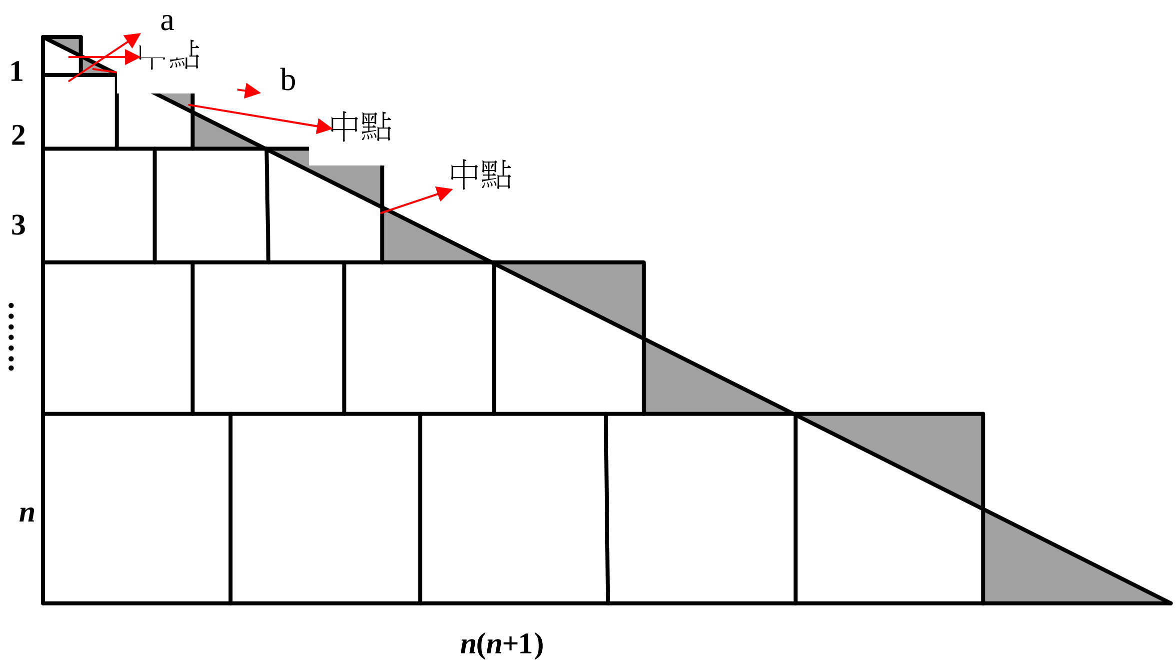


而我們要求的是它的面積
也就是長方形面積的一半,即 n(n+1)除以 2

於是,我們開始思考 $1^m+2^m+3^m+4^m+\cdots\cdots n^m$ 在 m=2,3,4 或更高的次方時,是否能用圖形來呈現

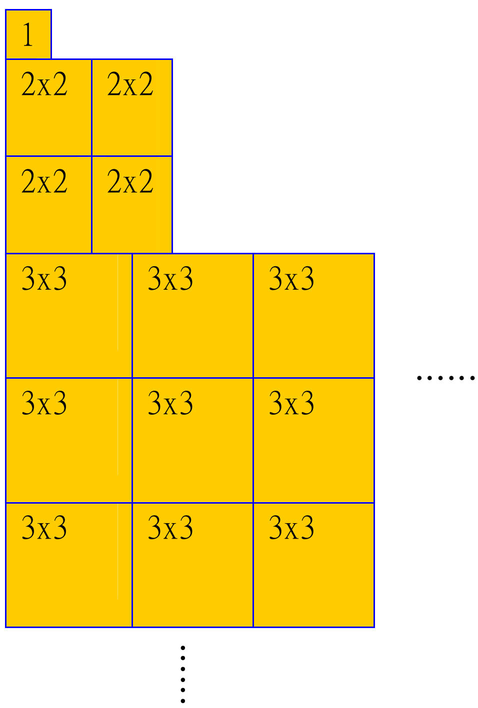
二、研究過程

$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots\cdots n^3$,我們查閱資料,得到:



由邊長 1 單位的正方形左上角連接另一邊中點,形成一條輔助線,該線右方灰色的三角形,可以移動,因此形成邊長(1+2 +3 +4 +⋯⋯n)xn(n+1)的大三角形,其面積是 $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$,是個一目了然的結果

1.我們想要探討 $\sum_{k=1}^{n} k^4$ 的情況



其中數字表示面積，面積１ｘ１的正方形有１個，２ｘ２的正方形有２ｘ２個，３ｘ３的正方形有３ｘ３個⋯⋯直到ｎｘｎ的正方形有ｎ個，因此其面積爲 $1^4+2^4+3^4 \cdots\cdots n^4$（上圖鋪色部分）

觀察其公式

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

發現其公式可做如是的更改

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \left[\frac{1}{6}\ n(n+1)(2n+1)\right] \times \left[\frac{1}{5}(3n^2+3n-1)\right]$$

即 $\sum_{k=1}^{n} k^2\ \frac{1}{5}\ (3n^2+3n-1)$

$$5\sum_{k=1}^{n} k^4 = \sum_{k=1}^{n} k^2\ (3n^2+3n-1)$$

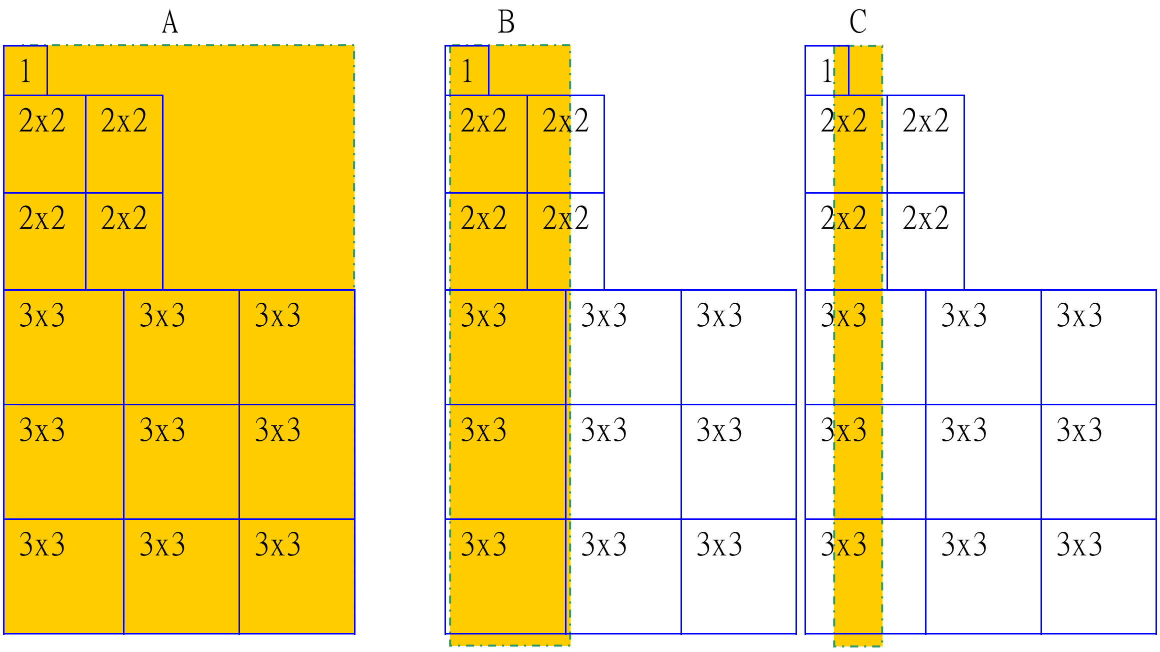
$\sum_{k=1}^{n} k^4$ 是前述圖形，所以 5 個前述的圖形可以表示成　長爲 $\sum_{k=1}^{n} k^2$ ，寬爲

（$3n^2+3n-1$）的矩形,基本上直線的方程式爲一次函數,出現（$3n^2+3n-1$）的方程式顯然並非很恰當,因此用分配律進行化簡,於是

$5\sum_{k=1}^{n} k^4 = 3n^2\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3n\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2$,以下令右式的 $n^2\sum_{k=1}^{n} k^2 = A$，$n\sum_{k=1}^{n} k^2 = B$，

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = C$，以及所要求的 $\sum_{k=1}^{n} k^4 = S$,也就是 $5S = 3A+3B-C$,把 A、B、C 以幾何圖形

表示:

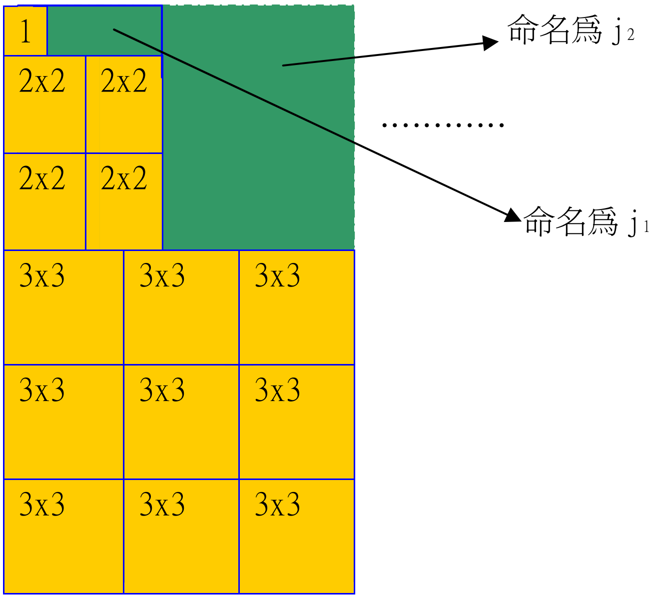


A 圖裡含我們要求的 S，由前面的 $5S = 3A+3B-C$

$3S+2S=3A+3B-C$

$2S=3(A-S)+3B-C$…………(a)式

下圖的綠底部分即為 A-S



我們將 A-S 的圖形切割成諸如 j_1,j_2 的矩形,接著命名為 j_3 ,j_4,j_5 並依此類推直到 j_n ,觀察可得 $j_1=1^2X(2^2-1^2)$, $j_2=(1^2+2^2)X\ (3^2-2^2)$,而 $j_3=(1^2+2^2+3^2)X\ (4^2-3^2)$,再者

$j_n=(1^2+2^2+3^2\cdots\cdots+n^2)\ [n^2-(n-1)^2]$

$=(1^2+2^2+3^2\cdots\cdots+n^2)X(2n-1)$

$= (2n-1)\sum_{k=1}^{n}k^2$

換言之 $A-S=j_1+j_2+j_3\ \cdots\cdots j_n$

$=\sum_{p=1}^{n}\ [\sum_{k=1}^{p}k^2\ (2p-1)]$

呈現的是前述 A-S 的圖形(階梯形)以好幾個矩形表示。

於此之外,對於 A-S 的面積,由前述的定義,也就是 $A=n^2\sum_{k=1}^{n}k^2$,$S=\sum_{k=1}^{n}k^4$ 用公式計

算: $A-S=n^2\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k^4$

$=n^2[1/6n(n+1)(2n+1)]-1/30n(n+1)(2n+1)\ (3n^2+3n-1)$

$=1/6n(n+1)(2n+1)[\ n^2-1/5\ (3n^2+3n-1)]$

$=\sum_{k=1}^{n}k^2\ \ (2/5\ n^2-3/5n+1/5)$

$=1/5\sum_{k=1}^{n}k^2\ (2n^2-3n+1)$

$=1/5\sum_{k=1}^{n}k^2$ (n-1)(2n-1)…………(b)

$=1/5\sum_{t=1}^{n-1}t^2$ (n+1)(2n+1) …………(c)

令(b)式的 $\sum_{k=1}^{n}k^2$ 爲一長方形的長，寬爲 1/5(n-1)(2n-1) (也就是長 1/5(n-1) 單位的線段有 2n-1 段),並將該矩形命名爲 D

將(b)式代回(a)式

2S=3D+3B-C,可得 2S=3[1/5$\sum_{k=1}^{n}k^2$ (n-1)(2n-1)]+3B-C,簡言之,我們要以 3 個 D 圖形和 3 個 B 圖形扣 1 個 C 圖形轉換成 2 個 S 的圖形。
圖形的轉換可用切割的方式,假如把 S、D、B、C 全以 1 單位平方的正方形表示,理所當然可作上述的轉換,因此,我們要做的是「切割」,而且是最少次數的切割,這可能比較接近一個「拼圖」的問題。這個方向仍需要探討。

2．立體的呈現:

$5\sum_{k=1}^{n}k^4 = \sum_{k=1}^{n}k^2$ $(3n^2+3n-1)$ ……(a)

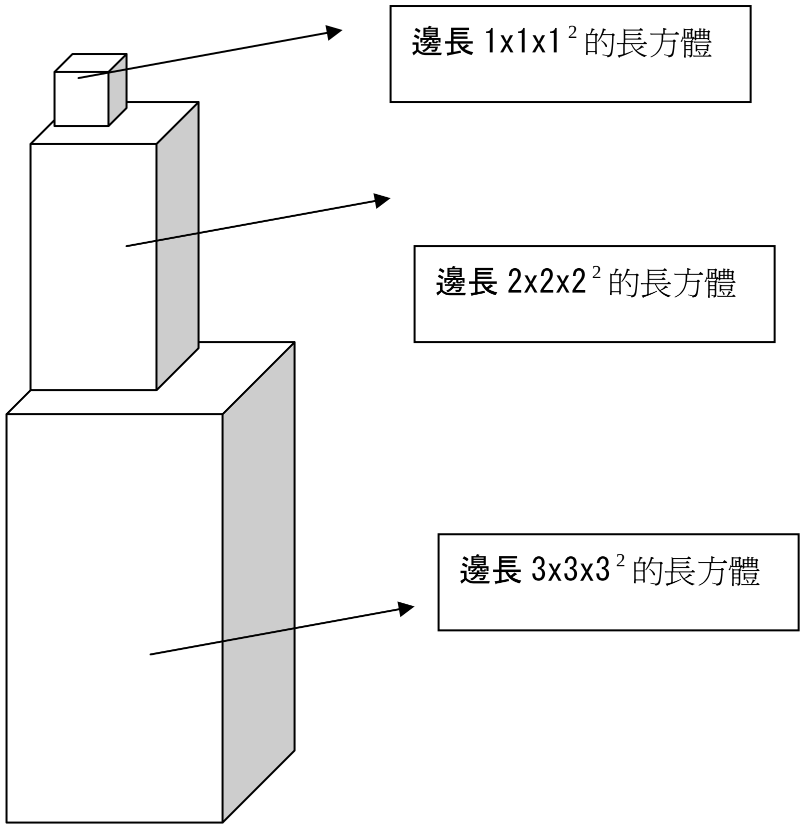
左式可以用邊長 $n \times n \times n^2$,邊長 $n \times 1 \times n^3$，或邊長 $n^2 \times n^2 \times 1$ 的小長方體的堆疊表示，我們將一一嘗試

(1)$n \times n \times n^2$ (如次頁的圖)

小長方體的高可以爲 n 或 n^2

把小長方體疊起來才是 $\sum_{k=1}^{n}k^4$ 的高,爲 $\sum_{k=1}^{n}k$ 或 $\sum_{k=1}^{n}k^2$,因爲

$5\sum_{k=1}^{n}k^4 = \sum_{k=1}^{n}k^2$ $(3n^2+3n-1)$ ……(a)的右式含 $\sum_{k=1}^{n}k^2$,爲了方便討論,以 $\sum_{k=1}^{n}k^2$ 爲小長方體的高,即



方才平面的結果也可用在立體上
不過,探討的過程中我們又瞥見了另一種觀點,如下:

$$5\sum_{k=1}^{n}k^4 = \sum_{k=1}^{n}k^2\,(3n^2+3n-1) \quad \cdots\cdots(a)$$

括號內的 $3n^2+3n-1=3(n^2+n)-1$

$$=\frac{6}{2}(n^2+n)-1$$

$$=6\sum_{k=1}^{n}k \ -1$$

即 $5\sum_{k=1}^{n}k^4 = \sum_{k=1}^{n}k^2\,[5\sum_{k=1}^{n}k + (\sum_{k=1}^{n}k \ -1)]$

$$5\sum_{k=1}^{n}k^4 = 5(\sum_{k=1}^{n}k)(\sum_{k=1}^{n}k^2)+(\sum_{k=1}^{n}k^2)\ [(\sum_{k=1}^{n}k)-1]$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = (\sum_{k=1}^{n} k)(\sum_{k=1}^{n} k^2) + \frac{1}{5}(\sum_{k=1}^{n} k^2)[(\sum_{k=1}^{n} k) - 1]$$

令$\sum_{k=1}^{n} k^4 = S$，

$(\sum_{k=1}^{n} k)(\sum_{k=1}^{n} k^2) = T$,

$1/5(\sum_{k=1}^{n} k^2)[(\sum_{k=1}^{n} k) - 1] = U$,

即 S=T+U

也是有待深入的。