宜蘭高中 98 學年度學生數理自然科學專題研究

題目：

亂中有序

指導老師：

楊明雯

學生：

吳羽倫

林　真

亂中有序

--二階遞迴數列初探

吳羽倫、林真

壹、 摘要

我們提出了一個「二階遞迴數列」作爲我們研究的題目。

$$A_1 = A_2 = 1; \forall n \geq 3, A_n = A_{n-A_{n-1}} + A_{n-1-A_{n-2}}$$

利用探討其子元素、出現次數，輔以二進位表示法和「烏龜圖」，可得到 n 及 A_n 的互換方式。

貳、 研究動機

一次的數學功課中，老師要我們觀摩歷屆科展的說明書。恰好參閱到 47 屆，同校學長的「Hofstadter Conway $10000 數列」。裡面那有些複雜，卻又如此迷人的數列勾起了我們的興趣，一窩瘋地栽入了遞迴數列的漩渦了。在高中第一冊第二章，我們討論過「數列與級數」，老師也傳授了一些破解遞迴數列的技巧。面對如此「強敵」，我們勢必要另闢蹊徑才能知道它的「一般式」了。

參、 研究目的

1. 討論此數列的特別性質，並討論原因。
2. 討論此數列每一自然數的出現次數及其原因。
3. 討論此數列能不能得到一般式及其原因。

肆、 研究設備及器材

紙、筆、電腦、C++語言、Excel 試算表

伍、 研究過程及方法

一、名詞定義

◎在本篇討論中，均使 $A_1 = A_2 = 1$

1.遞迴式：一遞迴數列中，將 A_n 表示成 $A_n = A_\alpha + A_\beta$ 的形式。其中 A_α、A_β 分別稱作 α 子元素及 β 子元素。

2.一般式：將 A_n 表示成函數形式，其中包括多項函數、指對數函數及三角函數。

3.一階遞迴數列：遞迴式中的 α 、β 可表示成 m 或 n-m 的形式。例如：

$A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$ (費氏數列)

根據我們查詢的資料，大多數的一階遞迴數列都能透過解方程的技巧找到一般式，在此不詳述。

4.二階遞迴數列：遞迴式中的 α 、 β 需表示成 A_m 或 A_{n-m} 的形式。例如：

$A_n = A_{n-A_{n-1}} + A_{n-1-A_{n-2}}$ 。即是我們要討論的數列。

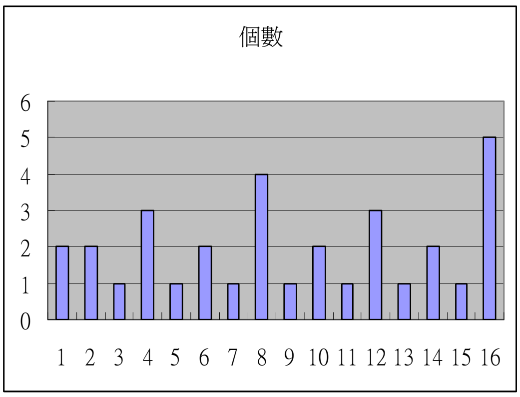
二、初探數列

以下給出表格一統計 A_n 以及子元素之值。

$A_n = A_{n-A_{n-1}} + A_{n-1-A_{n-2}}$				$A_n = A_{n-A_{n-1}} + A_{n-1-A_{n-2}}$			
n	$A_{n-A_{n-1}}$	$A_{n-1-A_{n-2}}$	A_n	n	$A_{n-A_{n-1}}$	$A_{n-1-A_{n-2}}$	A_n
1			1	17	5	4	9
2			*1*	18	5	5	10
3	1	1	2	19	5	5	10
4	*1*	*1*	*2*	20	6	5	11
5	2	1	3	21	6	6	12
6	2	2	4	22	6	6	12
7	2	2	4	23	6	6	12
8	*2*	*2*	*4*	24	7	6	13
9	3	2	5	25	7	7	14
10	3	3	6	26	7	7	14
11	3	3	6	27	8	7	15
12	4	3	7	28	8	8	16
13	4	4	8	29	8	8	16
14	4	4	8	30	8	8	16
15	4	4	8	31	8	8	16
16	*4*	*4*	*8*	***32***	***8***	***8***	***16***

再給出表格二及圖一統計 A_n 值出現次數。

An	1	***2***	3	***4***	5	6	7	***8***
個數	2	***2***	1	***3***	1	2	1	***4***
An	9	10	11	12	13	14	15	***16***
個數	1	2	1	3	1	2	1	***5***



由以上表格推論以下幾點：

1. 由表格一：

(1) 當 n=$2^h(h \geq 1且h \in N)$時，$A_n = 2^{h-1}$。

(2) 本數列遞增。

2. 由表格二：

(1) 2^h出現$\text{h}+1$次 。

(2) 當 A_n 爲奇數時只出現 1 次。

(3) 由上面兩點發現將 A_n 値質因數分解成 $2^l \times B$ $[(B,2)=1]$ ，可發現其會出現 $l+1$次。並推測其與二進位有關。

例如：A_n=36=$2^2 \times 3^2$ ，此時l=2，得知 36 會在此數列中出現 3 次。

到目前爲止，我們所找到的規律大都建築在二進位上面，尤其在出現次數上面探討出具體的式子。

我們將利用這點，在後面推論此數列的一般項求法(n以及A_n的互換)

(4) 配合表格一，可發現最後一個2^{h-1}出現在第2^h項。

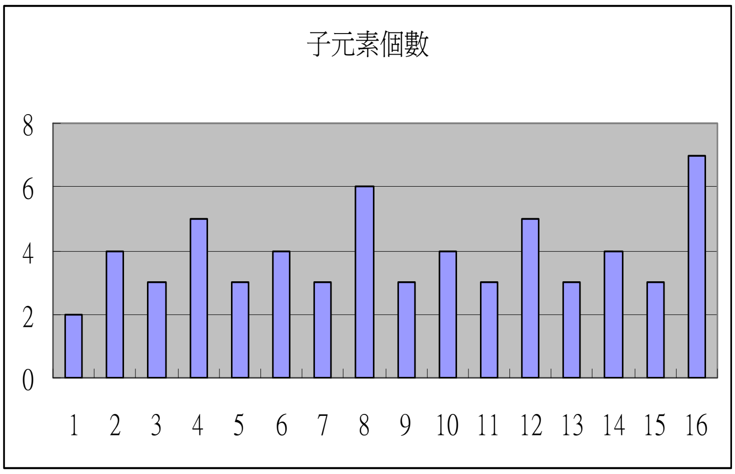
3. 關於子元素

(1) $A_{n-A_{n-1}}$、$A_{n-1-A_{n-2}}$ 就本質上而言是一樣的東西：

若 n=k+1，則$A_{n-1-A_{n-2}} = A_{\text{k}-A_{\text{k}-1}}$ 。因此在表一中，α子元素和β子元素的值將階差一項，即A_n的α子元素=$\text{A}_{\text{n+1}}$的β子元素。與費氏數列有異曲同工之妙。

(2) 觀察β子元素值的出現次數(表三)：

子元素	1	2	3	4	5	6	7	8
個數	3	4	3	5	3	4	3	6
子元素	9	10	11	12	13	14	15	16
個數	3	4	3	5	3	4	3	7



發現若把子元素出現個數減 2 並與表二做比較：

子元素	1	**2**	3	**4**	5	6	7	**8**	9	10	11	12	13	14	15	**16**
個數減 2	1	**2**	1	**3**	1	2	1	**4**	1	2	1	3	1	2	1	**5**

「子元素值出現次數減 2」和「A_n 值」出現次數除了 1(硬性規定)幾乎一樣

(3) 觀察 α 子元素與 β 子元素可發現：

α 子元素=$\left[\dfrac{A_n+1}{2}\right]$　　　β 子元素$\left[\dfrac{A_n}{2}\right]$

因爲階差一項，且$1 \geq A_{\alpha+1} - A_\alpha \geq 0$，所以 A_α 與 $A_\beta \fallingdotseq \dfrac{1}{2}A_n$

三、已知 A_n 求 n

An	1	**2**	3	**4**	5	6	7	**8**	9	10	11	12	13	14	15	**16**
個數	2	**2**	1	**3**	1	2	1	**4**	1	2	1	3	1	2	1	**5**

(上爲表格二)

爲了方便說明，令「A_n 出現次數」爲 P_n。

由於此數列遞增，因此由 A_n 反求 n 的方法可從求「P_n 級數和(下稱 S_n)」出發，

例如 $S_1 = 2$ 、$S_2 = 4$。

前面提到，當 $A_n = 2^l \times B$ 時，其出現次數將爲 $l+1$ 次。因此我們可導出 S_n 的一

般式=$1+A_n+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\dfrac{A_n}{2^m}\right]$(因爲 1 被硬性規定，而比預期規律多出現了 1 次)。然而，

此種表示方法在表示上稍嫌繁雜，因此，我們引入了 **2 進位表示法**，並以 $n_{(m)}$ 表

示將 n 用 m 進位的方式表示：

若令 k= $A_{n(2)}$ 中「1」的數目(如 $5_{(10)} = 101_{(2)}$，則 k=2)

$$S_n = 1 + A_n + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{A_n}{2^m}\right] = 2A_n + 1 - k$$

證明：

令$n! = 2^{l} \times B$且$(B,2) = 1$

(1) $S_n = l + n + 1$，$l = \left[\frac{A_n}{2^1}\right]$(1 到 n 中，2 的倍數個數)+ $\left[\frac{A_n}{2^2}\right]$(1 到 n 中，4 的倍數個數)+……= $\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{A_n}{2^m}\right]$。

故 S_n=1+n+$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{A_n}{2^m}\right]$。

(2)上面的過程很像用篩子篩麵粉，一層一層將 2「篩」出來。若將高斯記號拆開，勢必要解決$\frac{A_n}{2^m}$非整數之問題。而當$\frac{A_n}{2}$非整數時，$\frac{A_n - 1}{2}$便是整數，即減 1 之目的是爲了調整拆掉高斯記號產生之誤差。在一次又一次的篩的過程，減 1 的次數恰和 k 相等。利用此法調整誤差後：

S_n=1+A_n+$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{A_n}{2^m}\right]$=1+$A_n$+$\frac{A_n}{2}+\frac{A_n}{4}+\frac{A_n}{8}+\ldots\ldots+\frac{A_n}{2^{\infty}}$-k=1+$\frac{A_n}{1-\frac{1}{2}}$-k=

$1 + 2A_n - k$。

S_n代表A_n最後出現的項數(因爲此數列遞增)。以下取一具體例子：

當$A_n = 8_{(10)} = 1000_{(2)}$，則 k=1。$S_n$=1+2×8-1=16。即最後一個 8 出現在第 16 項。而A_n=7 時，S_n=1+2×7-3=12。最後一個 7 出現在第 12 項。綜合以上兩點可推得自第 13 項至第 16 項都是 8。

事實上，此點可和「當 n=$2^h (h \geq 1$且$h \in N)$時，$A_n = 2^{h-1}$」、「最後一個2^{h-1}出現在第2^h項」互相闡發：2^h化成 2 進位時，必只有最高位數爲 1，因此 k=1，

$S_n = 1 + 2^h \times 2 - 1 = 2^{h+1}$。

四、子元素和 n 的關係

β 子元素	1	***2***	3	***4***	5	6	7	***8***	9	10	11	12	13	14	15	***16***
個數減 2	1	***2***	1	***3***	1	2	1	***4***	1	2	1	3	1	2	1	***5***

在前面也提過，把 β 子元素出現個數減 2，與 P_n 除了第一項是一樣的，因此在上面討論 S_n 的求法可以應用在觀察子元素和 n 的關係上。

已知 $S_n = 2A_n + 1 - k$，我們令滿足 β 子元素 $= b$ 時的最大項數為 Sb_n，

(1)在上面的表格中，每一項的出現次數都被減去 2，因此須加回 $2b$。

(2)由於定義關係，子元素自第三項開始出現，因此要加 2。

(3)比較 P_n，減 1 平衡其差距。

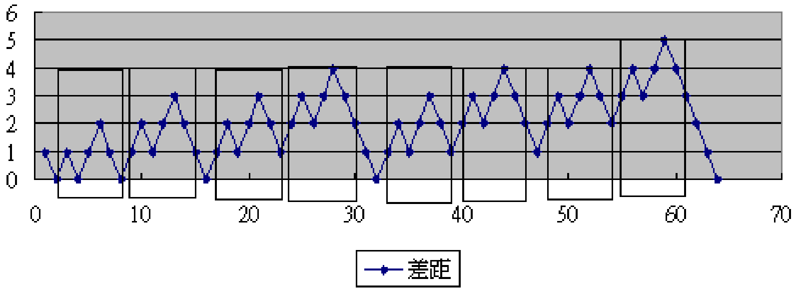
因此，我們可以得知 $Sb_n = 4b + 2 - k$。

由於 α 子元素和 β 子元素階差一項，可以得 $Sa_n = 4b + 1 - k$

五、烏龜圖

在說明由 n 求 A_n 的方法前，我們先引進「烏龜圖」並說明其基本性質：

觀察表格一後，發現 $2 \times A_n$ 和 n 間的差距似乎有規律，於是我們將「$2 \times A_n - n$」作圖觀察。



由圖可以發現方框中的形狀不斷出現，其形狀如烏龜，故我們暱稱它「烏龜圖」。茲列出烏龜圖的幾個性質：

1. 一隻烏龜含頭尾共有 7 項，其中第一項稱為「龜首」，最後 1 項稱為「龜尾」
2. 方框外(烏龜外)的點與前面一點的差距(如圖中第 16 項和第 15 項差距)都是 1。(基本上這些部分都很靠近 2^h)
3. 「大烏龜」: 前一隻烏龜的龜尾和後面一隻烏龜的龜首間無差距，如圖中第一隻和第二隻烏龜。

4. 「理想龜首」：以第二隻烏龜來說，其龜首位於第九項，而若要形成「理想烏龜群」，第三隻烏龜的龜首應位於第十六項。我們稱「第十六項」爲「理想龜首」。而實際龜首(第十七項)和理想龜首的差稱爲「龜首差」。

烏龜序號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
龜首	2	9	17	24	33	40	48	55	65	72	80	87	96	103	111	118
龜首所在值	0	1	1	2	1	2	2	3	0	1	1	2	1	2	2	3
下一個理想龜首	9	16	24	31	40	47	55	62	72	79	87	94	103	110	118	125
與下一項龜首差	0	1	0	2	0	1	0	3	0	1	0	2	0	1	0	4

發現每兩隻烏龜會聚成一隻「大烏龜」，所以現在改以「大烏龜」爲單位討論：

大烏龜序號	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
大龜首	2	17	33	48	65	80	96	111	129	144	160	175	192
大龜首所在值	0	1	1	2	1	2	2	3	1	2	2	3	2
下一個理想大龜首	16	31	47	62	79	94	110	125	143	158	174	189	206
與下一項大龜首差	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	

比較 P_n ，發現除了 P_1=2(因硬性規定)而有所不同，其餘如出一轍。

因爲一隻大烏龜共有 14 項，所以**第 n 隻大烏龜的龜首(注意：n 從 0 開始)可表示成 14n+(S_n-1)+2**=16n+2-k**(**S_n 第一項和此處的第一項差 1，所以減 1。)

六、由 n 求出 A_n

大烏龜的龜首可用公式求出，而大烏龜有固定的形狀。就算所求項數不在大烏龜內，其走向也是可預測的(以 $^1\!/_{1項}$ 的速率下降)。因此「大烏龜」能幫助我們自 n 求出 A_n 。

已知條件：n、大烏龜圖

作法：

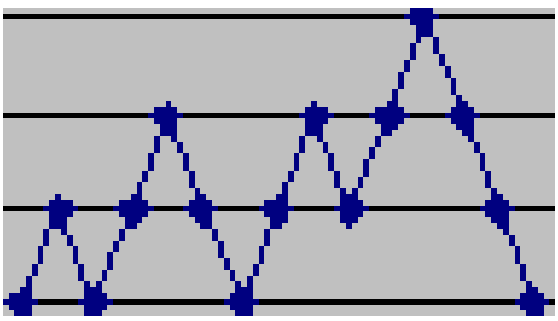
(1) 將 n 表成 16a+b 的形式，其中 $a \in N$ 或 $a = 0$ 、 $b \in Z$且$0 \le b \le 16$ 。

(2) 取第 a 隻大烏龜的龜首 T=16a+2-k，與 n 做比較，這裡分爲兩種情況：

①T>n：則 T 稱爲「前龜首」，再取第 a-1 隻烏龜之龜首 T'，則 T'<n 的情況下，T'稱爲「後龜首」。

②T<n：則 T 稱爲「後龜首」，再取第 a+1 隻烏龜的龜首 T'，則 T'>n 的情況下，T'稱爲「前龜首」。

(3) 以「後龜首」爲起點(最左邊一點)，其水平位置剛好爲 k。



(4) 前進至 n 後觀察水平位置，得 k’。若已走出本隻大烏龜而還沒到達下一隻，

以 $1/_{1項}$ 的速率下降。

(5) $A_n = \frac{n+k'}{2}$ 。

以下以一實例說明(求 n=24 時之 A_n 為何)：

(1) 24=1(a)*16+8(b)

(2) 第一隻大烏龜龜首：1*16+2-1=17<24(後龜首)

第二隻大烏龜龜首：2*16+2-1=33>24(前龜首)

(3) 以 17 為出發點，水平位置=k=1。

(4) 前進 7 格到達 24，得 k’=2。

(5) $A_n = \frac{24+2}{2} = 13$

陸、 結論

$$A_1 = A_2 = 1; \forall n \geq 3, A_n = A_{n-A_{n-1}} + A_{n-1-A_{n-2}}$$

對於這個二階遞迴數列，吾人可得：

(1) 將 A_n 值質因數分解成 $2^l \times B\ [(B,2)=1]$ ，可發現其會出現 $l+1$ 次。

(2) 在 S_n 代表 $\mathrm{A_n}$ 最後出現的項數的條件下，$S_n = 1+2A_n - k$ (k 為將 $\mathrm{A_n}$ 轉為二進位時「1」的數目)

(3) 令 Sa_n 以及 Sb_n 分別代表 α 子元素以及 β 子元素最後出現的項數，可得

$Sa_n = 4b+1-k$ ， $Sb_n = 4b+2-k$

柒、 參考資料

1. Mathworld:
http://mathworld.wolfram.com/