宜蘭高中 98 學年度學生數理自然科學專題研究

題目：

任意多邊形的重心求法

指導老師：

葉克斌

學生：

林　彤

李堉辰

林語謙

鄧爵明

任意多邊形的重心求法

指導老師：葉克斌

研究學生：208林彤

208李堉辰

208林語謙

208鄧爵明

壹、研究動機：

在高二學平面向量時，曾利用向量尋找出重心及其座標公式之推導，國中也有學到三角形重心找法，但都只是利用數學公式、直角座標去解出特定多邊形的重心，並無實際拿著尺和筆作圖出重心的位置，於是我們開始利用尺規作圖去找出三角形、四邊形重心，並進一步研究至任意多邊形，和不等重多邊形重心的找法。

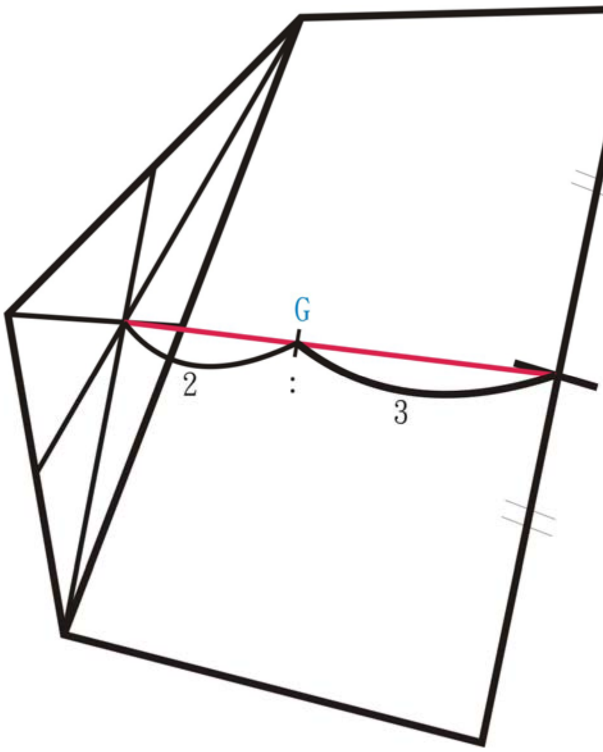
貳、研究目的：

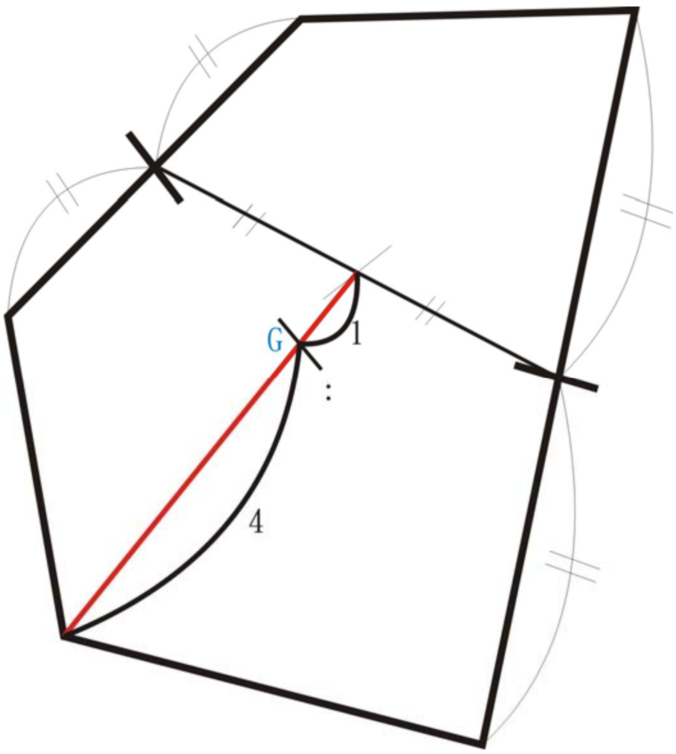
1.只利用筆和直尺找出任意多邊形的重心，不藉用定點座標或直角座標系等方法尋找。
2.將找出重心的方法分類，使其快又有條理的找出重心
3.在不等重的多邊形上找出重心

參、研究過程和方法：

1.摘要

從三角形重心找法和中點連線等方法，而找出多邊形的重心（也就是幾何中心）。主要的方法如下圖：





但各多邊形重心找法及使用的比例方法很多，希望透過一種方法可以概括所有任意多邊形重心的找法。

2.重心的定義

(1) $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$（任意多邊形）

(2) $m_1\overrightarrow{OA_1}+m_2\overrightarrow{OA_2}+m_3\overrightarrow{OA_3}+\cdots+m_n\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$（不等重的多邊形）

方法：一個多邊形中，將多個頂點利用比例化簡成較少的點，以此類推直到找到重心。

証明：

多邊形A1A2..Am,將其分爲兩多邊形A1A2..An的重心N,An+1An+2..Am的重心M,

若多邊形A1A2..Am的重心爲G，則 $\overline{MG}$: $\overline{NG}$ =n:m

由題可知

$\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\ldots\ldots\overrightarrow{MA_m}=\vec{0}$

$\overrightarrow{NA_m+1}+\overrightarrow{NA_m+2}+\ldots\ldots\overrightarrow{NA_n}=\vec{0}$

上面兩式可寫爲

$(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA_1})+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA_2})+\ldots..(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA_m})+=\vec{0}$ …….一式

$(\overrightarrow{NG}+\overrightarrow{GA_m+1})+(\overrightarrow{NG}+\overrightarrow{GA_m+2})+\ldots..(\overrightarrow{NG}+\overrightarrow{GA_n})+=\vec{0}$ ………二式

將第一式和第二式相加

$m\overrightarrow{MG}+(\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\overrightarrow{GA_3}\ldots\ldots\overrightarrow{GA_m})+n\overrightarrow{NG}+(\overrightarrow{GA_m+1}+\overrightarrow{GA_m+2}+\overrightarrow{GA_m+3}\ldots\ldots\overrightarrow{GA_n})$

$=\vec{0}$

$\rightarrow m\overrightarrow{MG}+n\overrightarrow{NG}=\vec{0}$

$\rightarrow m\overrightarrow{MG}=n\overrightarrow{GN}$

故 M.G.L 三點共線且 $\overline{MG}$: $\overline{NG}$ =n:m

分類：

A. 任意多邊形的重心求法：

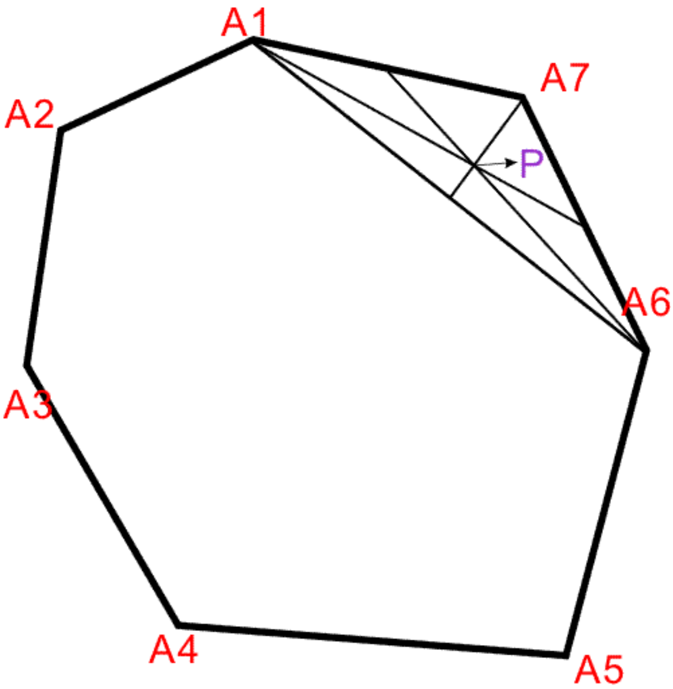
一、遞迴法

1.假設一 n 邊形，先找出兩個相鄰頂點中點（1：1），此點再與兩點外的其中一點連線，找出 1：2 的點，以此類推。直到剩下的一點，連線後以 1：n-1 的點即爲此多邊形的重心

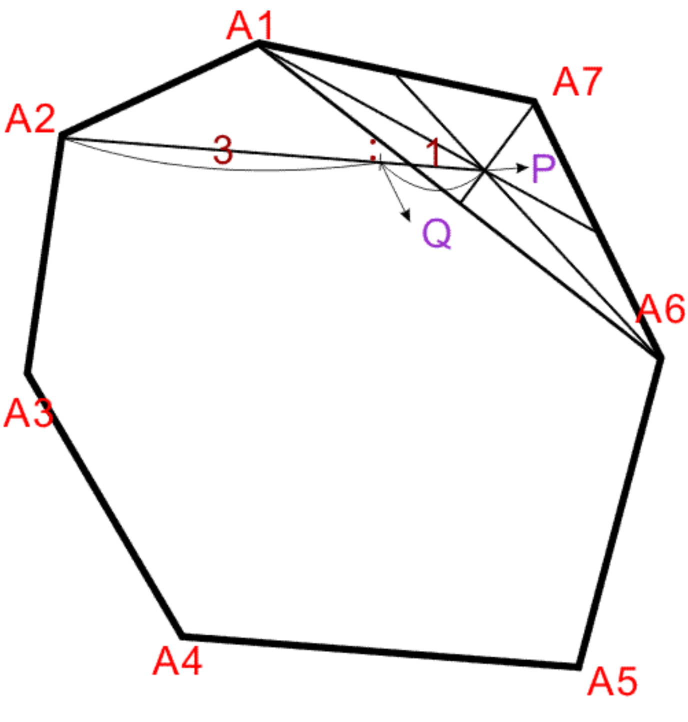
2.此方法可視爲一多邊形，在外面加一點後所圍出來的重心

舉例：以七邊形爲例子

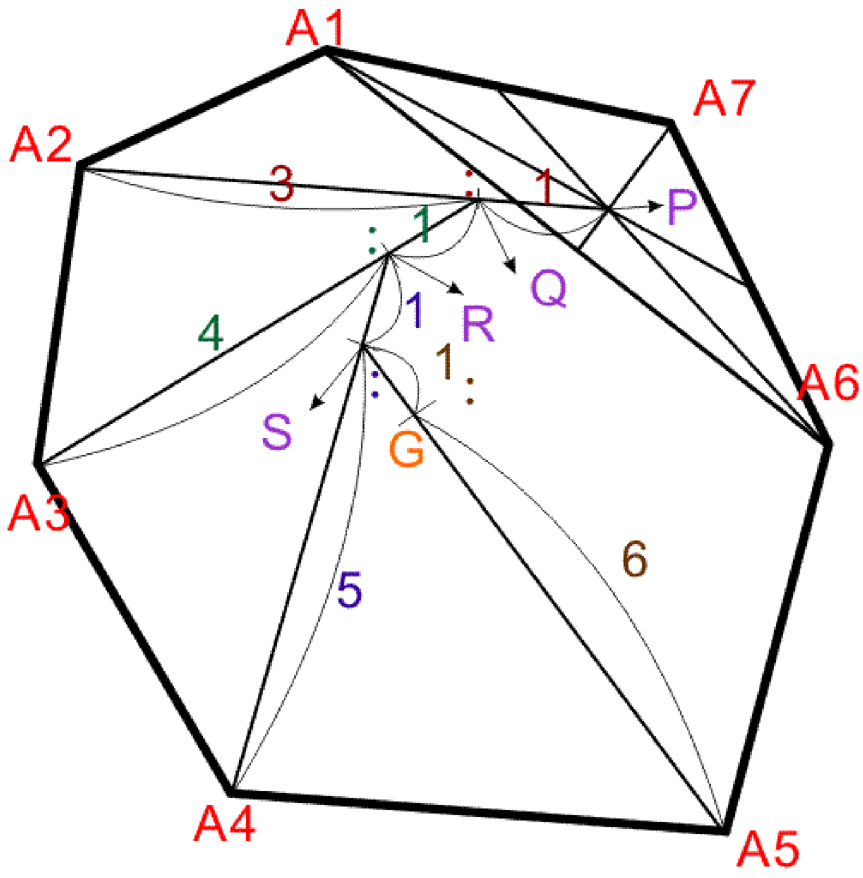
a.如圖，先找出 A1、A7、A6 所圍出的重心 P 點



b.再以 P 點及 A2 點連線，利用內分點找出 1：3 的點（即爲 Q 點）



c.將上述的作法以此類推，把前一個找出的點和下一個頂點，連線找出 1：x 的點（x 為前面算出的頂點數量），最後找到 G 點，即為此多邊形的重心

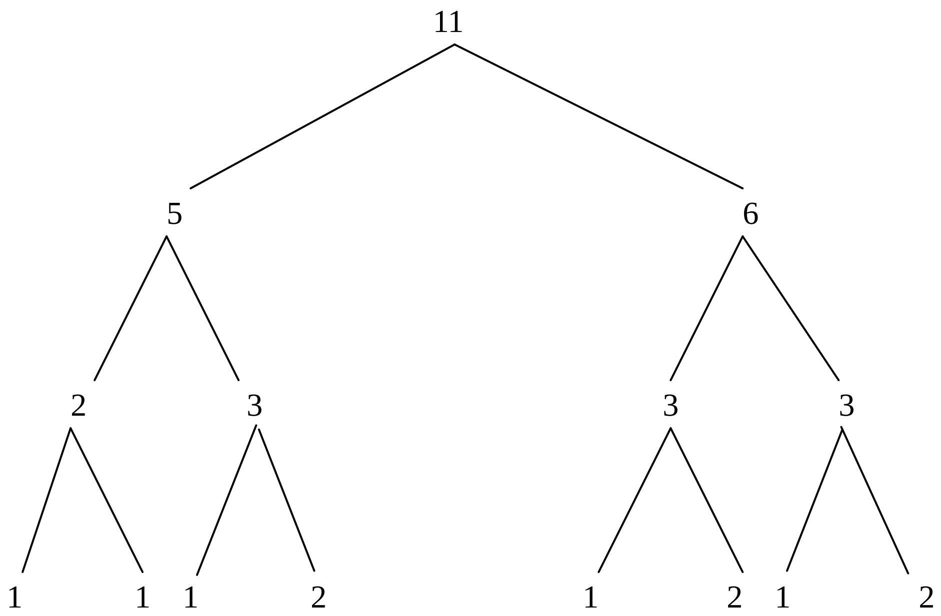


二、平均分配法

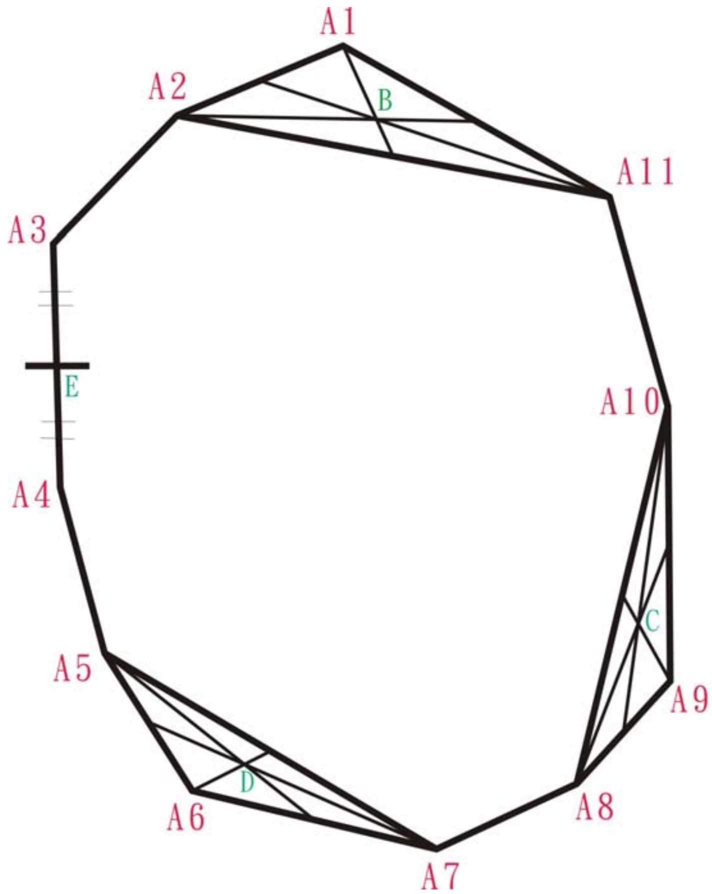
1. 設一個 n 邊形，將 n 平均分成兩個數字，其中兩數相加等於 n，再來繼續將分配後的數字分成兩個數，以此類推，直到最後兩數的比例為 1：1 或 1：2

2. 如果將被分配的數字 m 為偶數，則分配的兩個數字皆為 $\frac{m}{2}$；如果 m 為奇數，則分配的兩個數字各為 $\frac{m+1}{2}$、$\frac{m-1}{2}$。

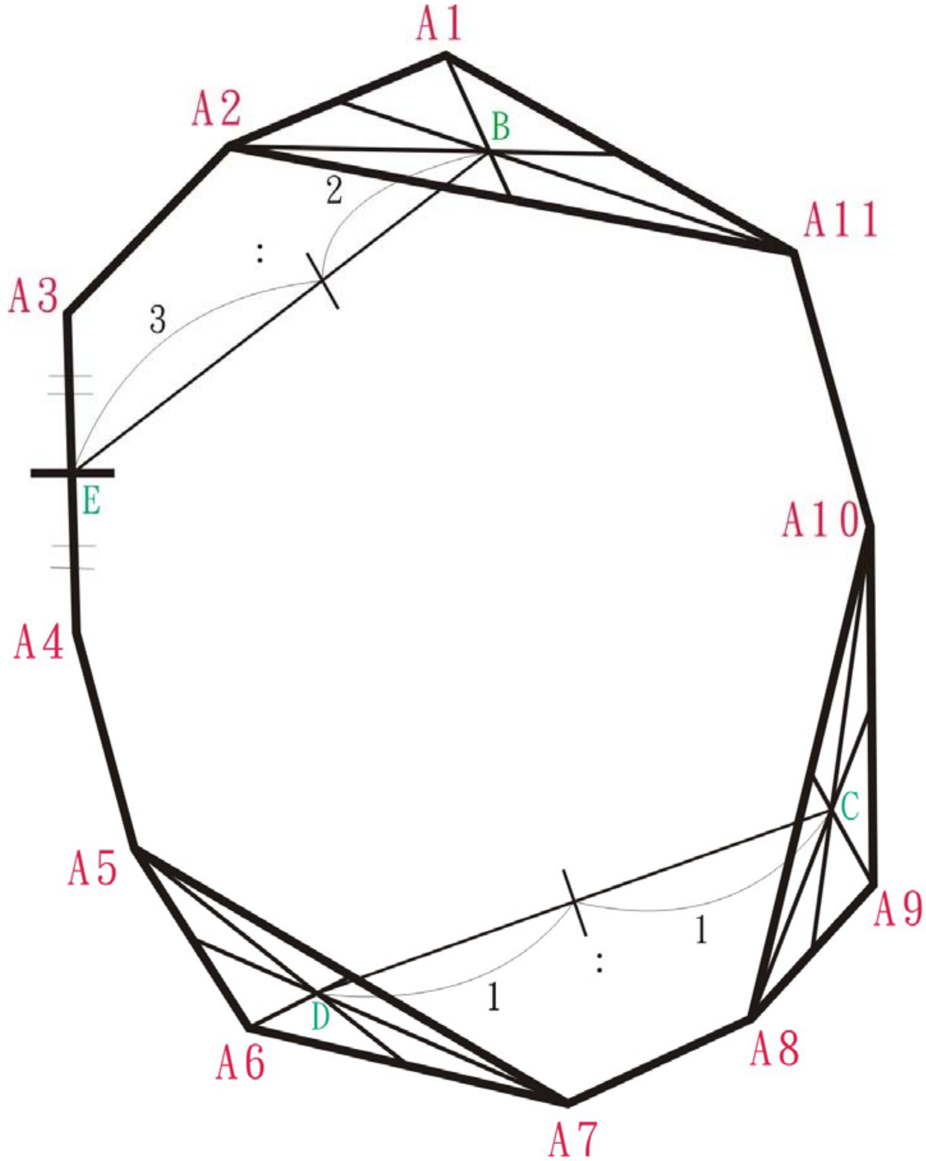
舉例：以十一邊形為例子



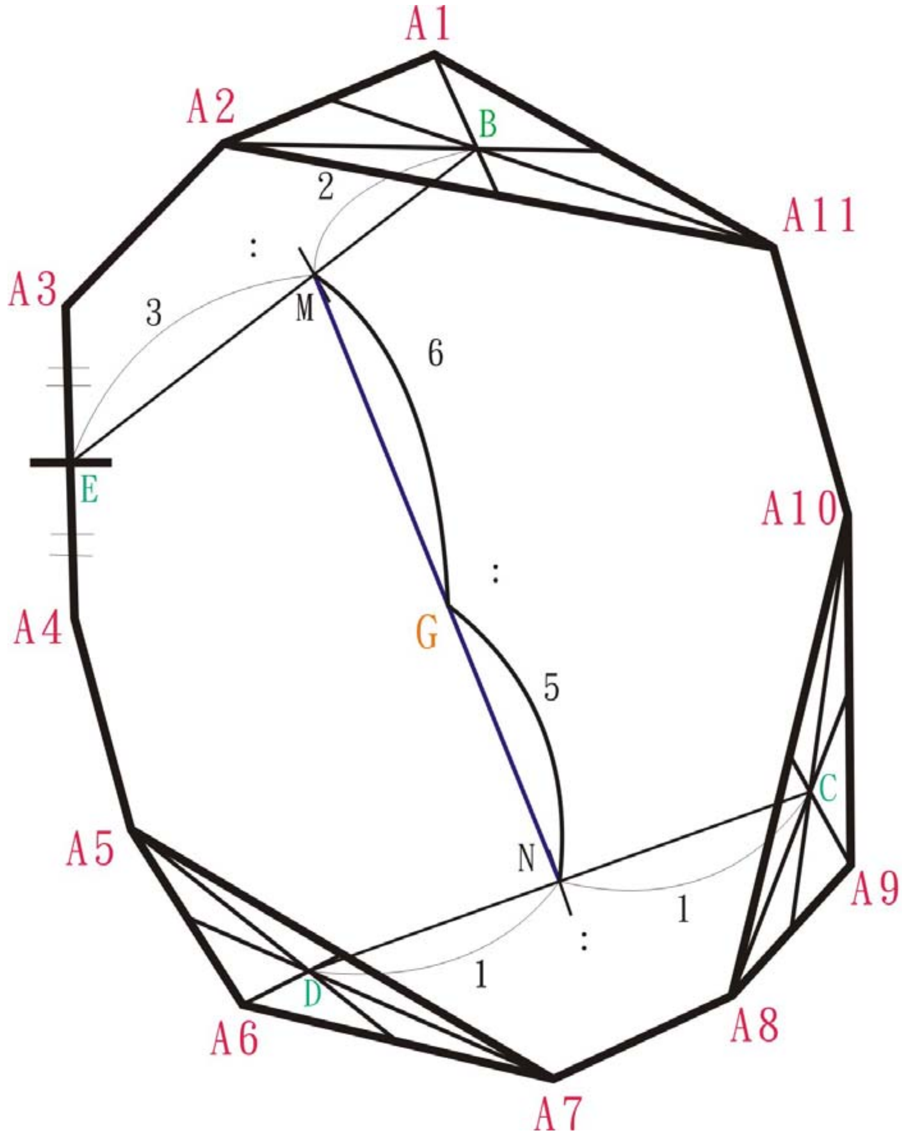
a.依照上面的樹狀圖，將 11 個點分成 2 個點、3 個點、3 個點、3 個點四組，以一個三角形 A1A2A11 舉例：以 A1 為起點連至 A2 到 A11 的中點，再以 A2 為起點連至 A1 到 A11 的中點，最後以 A11 為起點連至 A1 到 A2 的中點，三直線的交於 B 點



b.將各圍出來的重心點（或中心點）一對一連成直線，其中以 BE 爲例子：B 是從三點所構成的，E 是由兩點所構成的，所以在 BE 連線上以內分點的方式找出



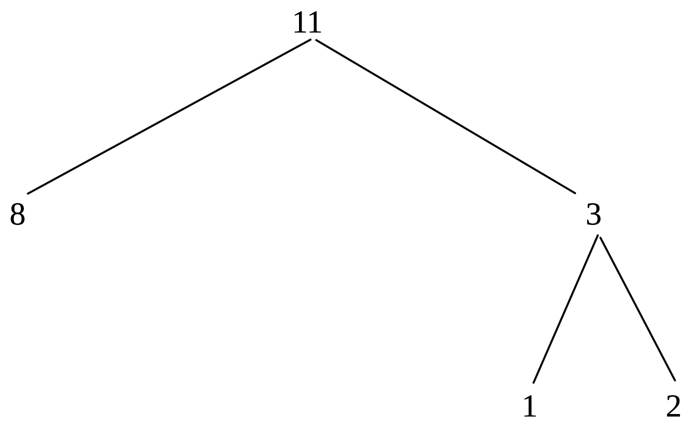
c.最後剩下 MN，再利用內分點重心 G



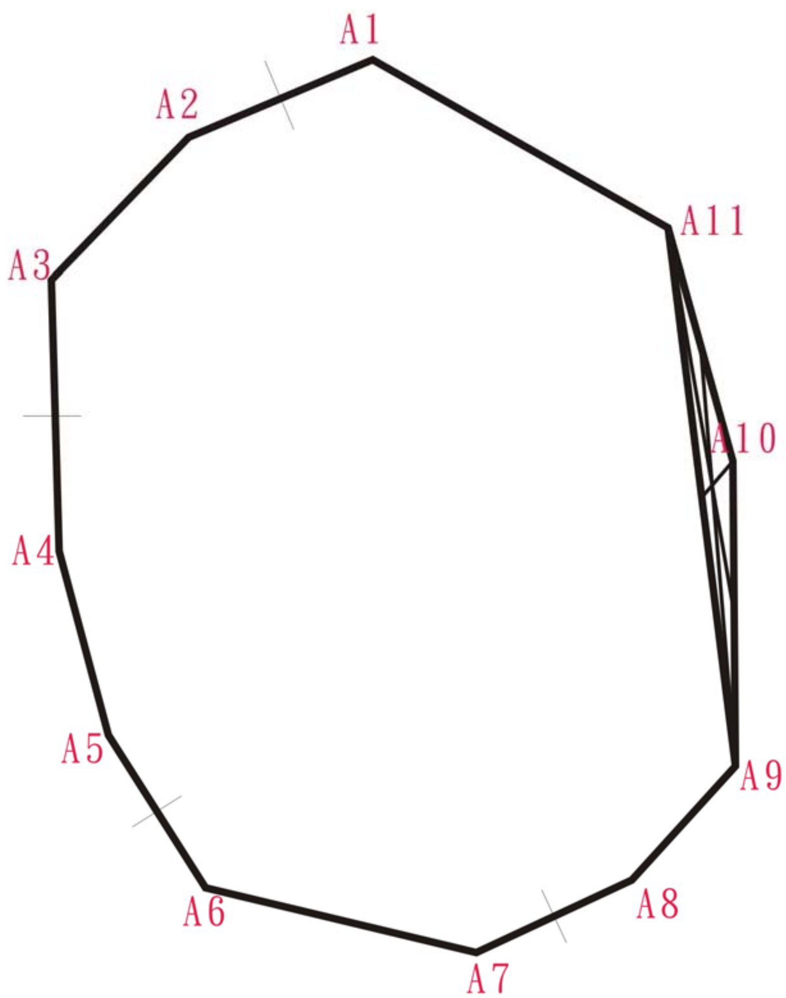
三、2^m分配法

1. 設一個 n 邊形，將 n 分成兩個數字，其中兩數相加等於 n，且一數爲最接近 n 且小於 n 的2^m數字，之後再將另一數分成兩數，按照上述作法，以此類推，直到最後剩下的數爲 1

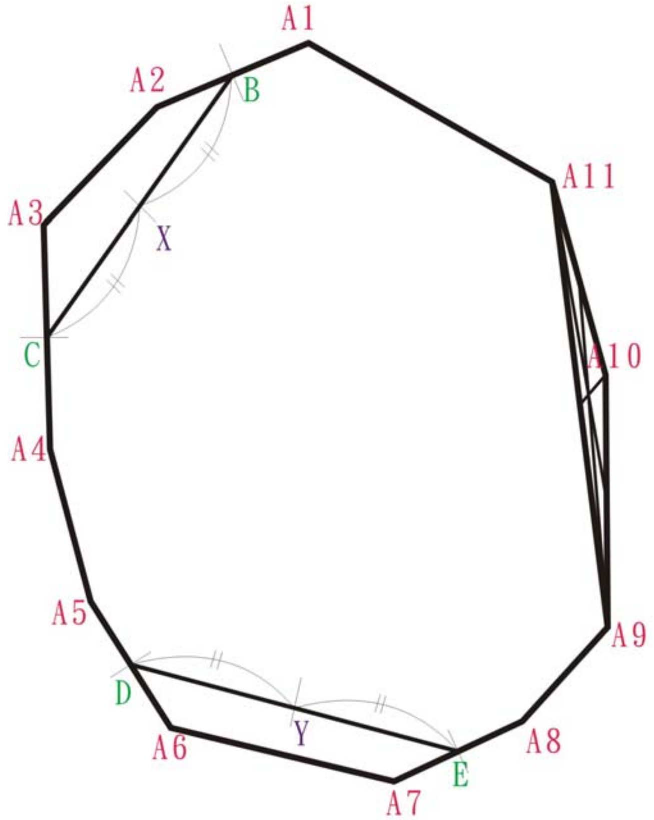
舉例：以十一邊形爲例子



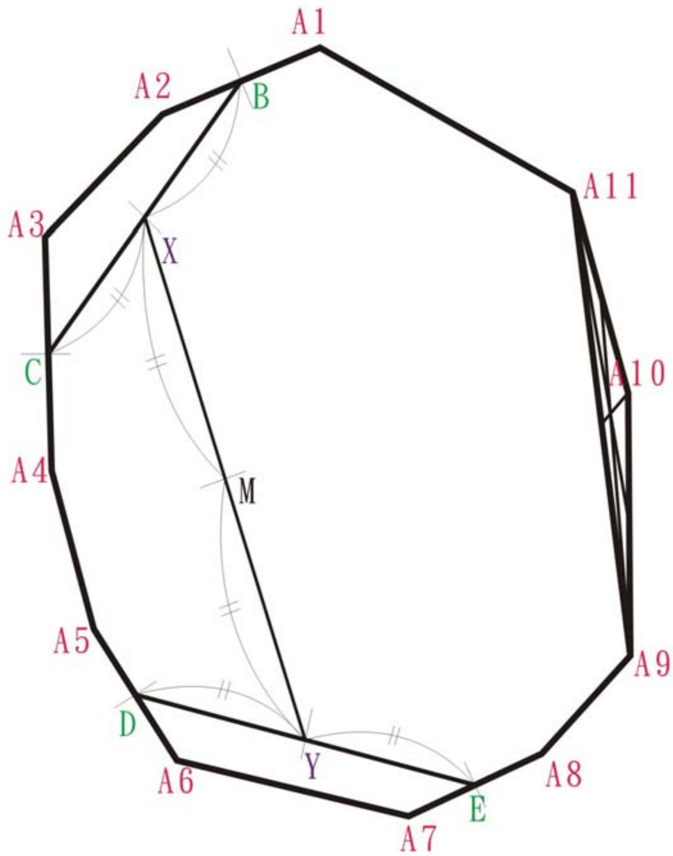
a. 依照上面的樹狀圖，將 11 個點分成 8 個點、3 個點兩組，8 點那一組，兩兩分為一對，連接取中心，會取出 4 個點，分別為 BCDE



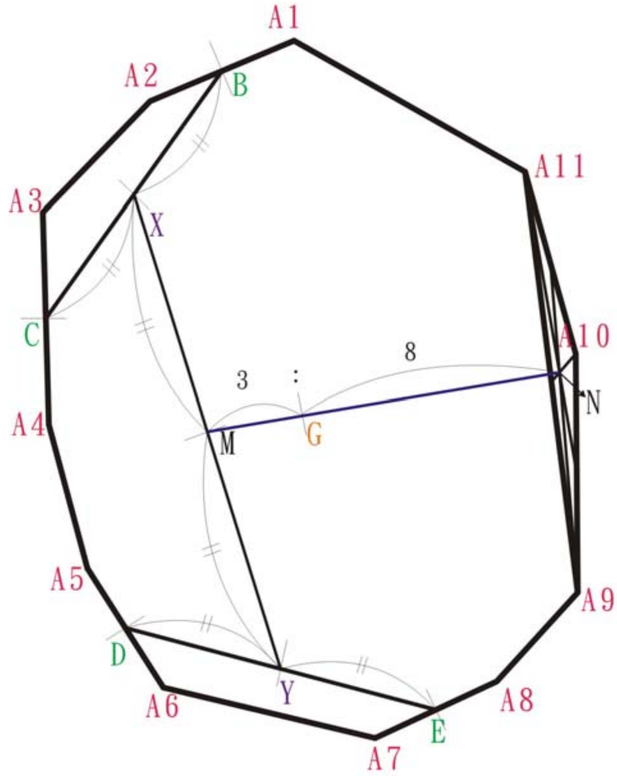
b. 在 BC 連線上取中心 X 和 DE 連接上取中心 Y



c. 在 XY 連線上取中心 M

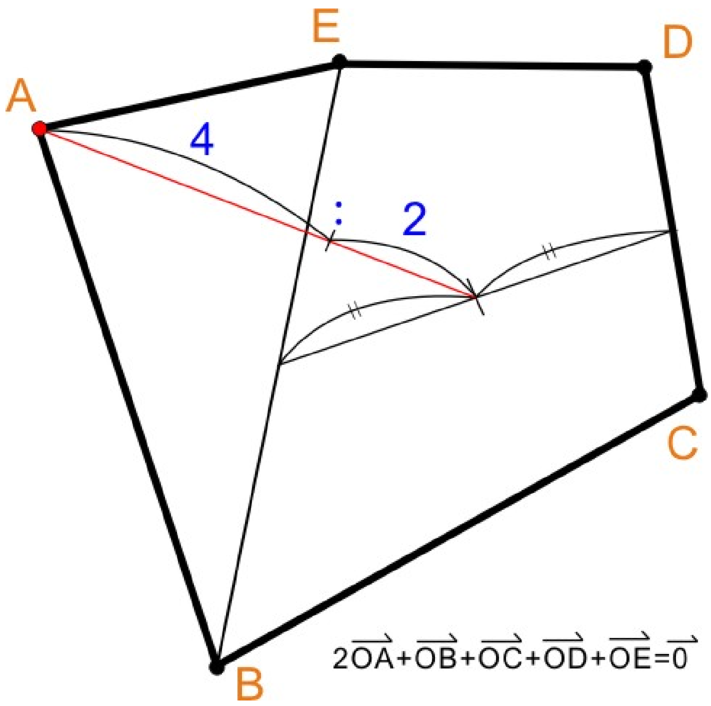


d.最後以內分點的方式在 MN 的連線上做內分點找出重心 G

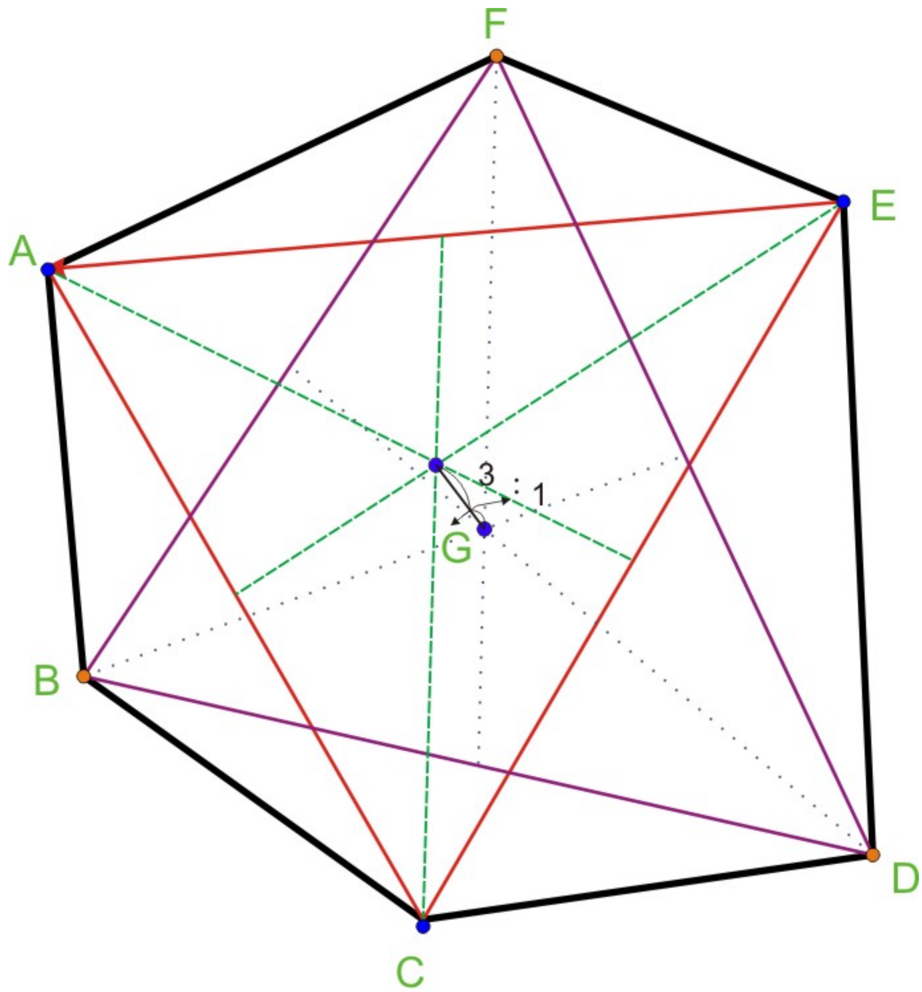


B.不等重多邊形的重心求法：我們將它分成三種類型

1.一個頂點不等重：設一個 n 邊形，其中頂點重量比例爲 $\overbrace{1:1:\cdots:1}^{\text{共 } n\text{-}1\text{ 個}}$：m，我們先將 n-1 個點所圍起來的重心先找出來，再把此點與剩下一點連線，以 m：n-1 的點即爲此不等重 n 邊形的重心（如下圖）

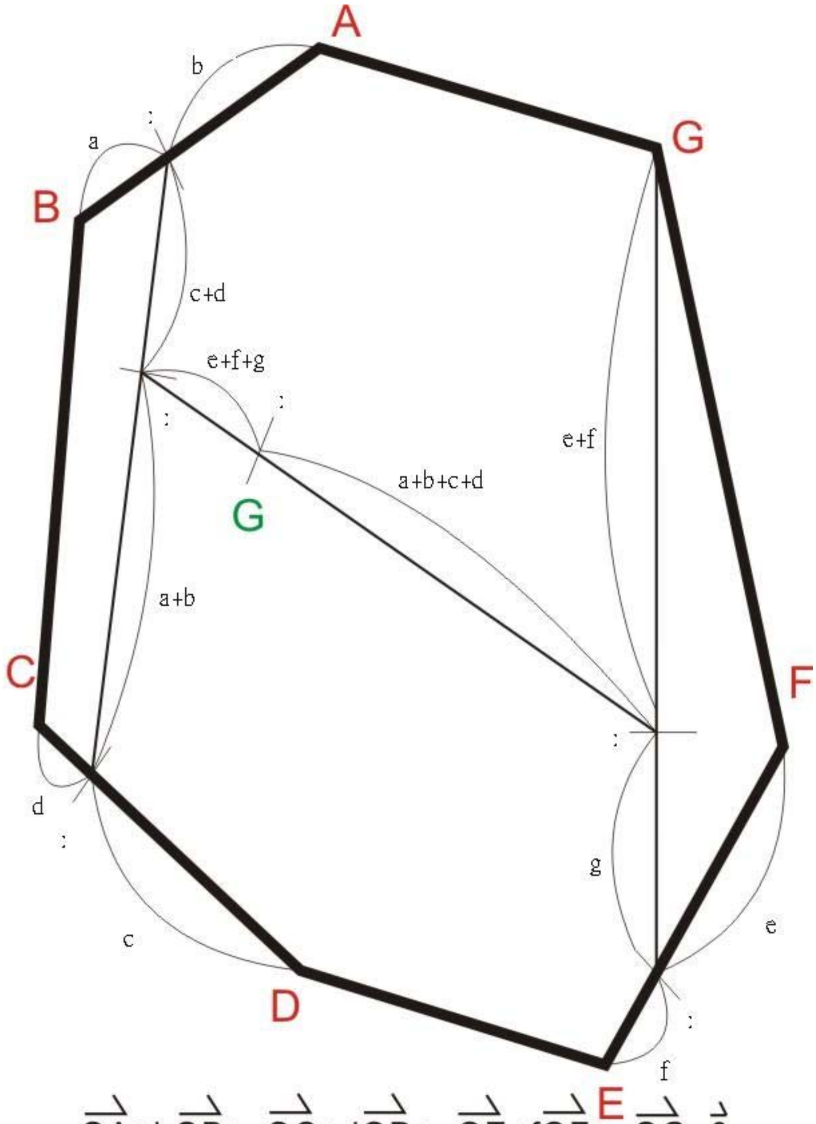


2.多個頂點不等重：設一個 n 邊形，其中有 x 個頂點不等重，頂點重量比例爲 1：1：⋯：1：x：x：⋯：x。先將相同比例的點分類，視爲兩個多邊形，在各自找出其重心後，連線以比例找出此不等重多邊形的重心（如下圖）



$$\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+3\overrightarrow{OF}=\vec{0}$$

3.各個頂點不等重：設一個 n 邊形，每的頂點重量比例不相同。我們利用前面等重多邊形的兩種方法（平均分配法、2^m 分配法），先將 n 個頂點兩兩一組，且分為一組的比例接近，再把每組利用內分點先找出現的重量比例，最後在兩兩連接慢慢簡化，直到最後剩下一點即為此不等重多邊形的重心（如下圖）



$$a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}+d\overrightarrow{OD}+e\overrightarrow{OE}+f\overrightarrow{OF}+g\overrightarrow{OG}=\vec{0}$$

肆、研究結果：

1. 用平均分配法時，化成的比例比較簡單，但是需要較多的輔助線來找比例
2. 用 2^m 分配法時，一開始只要利用各頂點的中點連線化簡圖形，最後再用比例找出重心

3.不等重多邊形重心找法，亦可用類似平均分配法的方法，依照各頂點重量比例，依照分點公式找出重心

伍、結論：

1. 用更多不同方法找出重心
2. 將方法化成公式，使我們更快找到重心點
3. 將我們的方法推廣到立體圖形

陸、參考資料

幾何學辭典