目　　　　次

銜接教材的導讀

在國中的課程中，同學們學過「數與量」、「代數」、「圖形與空間」和「統計與機率」等主題的題材。由於暫行綱要能力指標和各版本課程設計的緣故，使得在銜接高中一年級數學課程中的某些單元上，或許有不順暢之處。因此，我們歸納出「乘法公式與多項式」、「因式分解」、「平方根與立方根」、「一元二次方程式」、「線型函數與二次函數」、「不等式」和「數列與級數」等七個單元，並在附錄中列出「集合的概念」、「平面幾何的基本性質」與「三角函數的基本概念」三個單元，來協助同學們順利銜接高中課程的學習。

這份教材除了提供給高中做為銜接教學的參考依據之外，我們希望同學們也能自我學習。因此，在每一個單元中，我們會複習或說明國中階段的學習經驗，再進入銜接的主要內容。此外，我們也將立方根、一元二次不等式、一元二次方程式根與係數關係和二次函數的圖形等高一課程的子題納入教材中，我們鼓勵同學們能按部就班的學習，勇於接受挑戰。

進入銜接單元之前，我們將先介紹高中課程常用的數學概念或名詞。

【數系的發展】

在國中的課程裡，數的學習由正整數、正分數、正小數和零，擴展至負整數、負分數和負小數。在數學上，凡是能寫成兩個整數相除的數稱為「**有理數**」(Rational Number)，其中除數不為零。我們知道整數、分數和有限小數當然都是有理數。

此外，在小數中，可分為有限小數和無限小數，而且無限小數又分成循環的無限小數（簡稱循環小數），如：$0.3333\cdots$（記作$0.\overline{3}$）、$1.2525\cdots$（記作$1.\overline{25}$）、⋯等，和不循環的無限小數兩種類型。

在高中課程的「等比級數」單元中，會藉由無窮等比級數來說明循環小數也可用分數來表示，例如：$0.3333\cdots=0.\overline{3}=\dfrac{1}{3}$，$-1.111\cdots=-1.\overline{1}=-\dfrac{10}{9}$。因此，循環小數也是有理數。

那麼，不循環的無限小數應歸在數系裡的那一類呢？在數學裡，將不為有理數的數統稱為「**無理數**」(Irrational Number)。也就是說，不循環的無限小數是無理數。此外，在高中的課程中，同學們將要學習如何證明 $\sqrt{2}$ 、$\sqrt{3}$ 等平方根為無理數。此外，圓周率 $\pi = 3.14159\cdots$ 也是無理數。

再者，在數學上，將有理數和無理數統稱為「**實數**」(Real Number)，並常以英文大寫字母「**R**」來代表實數，「**Q**」代表有理數，「**Z**」代表整數，而以「**N**」代表正整數，或稱自然數。

在銜接教材中，我們會使用整數、分數、有理數和實數這些名詞，來協助同學們提早適應。此外，我們會用「**非負數**」來表示大於零，或等於零的數；同樣的，用「**非正數**」來表示小於零，或等於零的數。

除了實數，高中的課程再將數系的學習擴展到**複數**(Complex Number)。在數學上，以 $a+bi$（a、b 皆為實數）來表示複數，其中 $i^2=-1$。由於複數的引進，使得國中階段所討論的一元二次方程式都會有解。也就是說，以前我們說某些一元二次方程式沒有解，應該是說沒有實數解。

【方根的認識與計算】

在國中的課程裡，方根的學習侷限在平方根的認識為主，較少觸及平方根的計算。事實上，以 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 、$\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 為例，上述的算式已將國中階段指數律中的指數由整數擴展到 $\dfrac{1}{2}$，也就是說，

$$a^{\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{2}}=\left(a\times b\right)^{\frac{1}{2}} \text{ 、 } a^{\frac{1}{2}}\div b^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ 。}$$

在高中的課程裡，方根的學習將由平方根擴展到立方根 $\sqrt[3]{a}$ 或 $a^{\frac{1}{3}}$，乃至於 n 次方根 $\sqrt[n]{a}$ 或 $a^{\frac{1}{n}}$。因此，可將指數律的指數擴展至任意的有理數

$$a^p\times a^q=a^{p+q} \text{ ； } a^p\times b^p=(a\times b)^p \text{ 。}$$

此外，根式的化簡及有理化也是根式計算的重要項目。

【推理過程與符號的使用】

數學是一個深具知識結構的科學，在推論的過程中講求「有因方有果」的邏輯。也就是說，我們會在給定的條件下，嘗試去做分析與推論。例如，**若** $x>1$，**則** $x^2>1$。這樣的推論，也常用「**假設(已知、如果或因為)** $x>1$，**所以(或因此)** $x^2>1$」等形式來表徵。

有時候，我們會用一些特殊的符號來簡化這些推論的表徵。例如，以「$\because$」代表「若」、「假設」、「已知」、「如果」或「因為」，並以「$\therefore$」代表「**所以或因此**」。因此，以「**因為** $x>1$，**所以** $x^2>1$」為例，我們也可以用「$\because x>1$，$\therefore x^2>1$」來表徵。

事實上，「因為 $x>1$，所以 $x^2>1$」應有以下推論過程：

由 $x>1$，若對 $x>1$ 兩邊同乘以 x，可得 $x^2>x$。
因此，由遞移律，可得 $x^2>x>1$。

我們也常用箭頭符號「$\Rightarrow$」來表徵「由左向右」或「由上向下」推論的順序。因此，上述的推論過程可寫成：

$$\begin{array}{lll} \quad x>1 & & \because\ x>1>0 \\ \Rightarrow\ x^2>x & \text{或} & \therefore\ x^2>x \\ \Rightarrow\ x^2>1 & & \Rightarrow\ x^2>1 \end{array}$$

這樣的寫法常用在代數式的推論中，例如解 $2x^2+5x+2=0$ 時，我們可用下列的方式來解題：

$$\because\ 2x^2+5x+2=(2x+1)(x+2)=0$$
$$\Rightarrow\ 2x+1=0\text{，或 } x+2=0$$
$$\Rightarrow\ x=-\frac{1}{2}\text{，或 } x=-1$$

因此，在本教材中的某些範例中，我們會在有些推論的過程中使用這些符號的表徵。

一、乘法公式與多項式

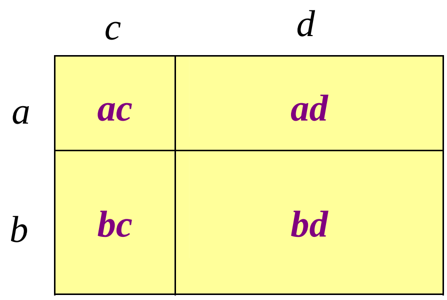
多項式的乘法公式除了用來簡化多項式的乘法運算外，還可運用於因式分解。在本章中，我們首先來複習已經學過的平方公式，然後再延伸到立方公式。

1-1 平方公式

【二項式相乘公式】

我們可利用分配律來展開$(a+b)(c+d)$的乘積而得到下列的公式：

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd \qquad \text{【公式 1】}$$



另一方面，也可利用幾何圖形來解釋這個公式。如上圖，一個邊長分別為$(a+b)$和$(c+d)$的長方形，可由四個面積分別為ac、ad、bc和bd的長方形所組成。我們可從大長方形的面積為四個較小的長方形的面積總和而得到這個公式。在應用上，a、b、c及d可為數字或任何文字符號。

【範例 1】 利用公式 1 展開下列各式：

(1) $(1+a)(1+b)$　　(2) $(x+2)(x+3)$　　(3) $(2x+y)(3x-y)$

【解】

(1) $(1+a)(1+b)=1\cdot1+1\cdot b+a\cdot1+a\cdot b$
$=1+a+b+ab$

(2) $(x+2)(x+3)=x\cdot x+x\cdot3+2\cdot x+2\cdot3$
$=x^2+5x+6$

(3) $(2x+y)(3x-y)=(2x+y)[3x+(-y)]$
$=2x\cdot3x+2x\cdot(-y)+y\cdot3x+y\cdot(-y)$

$$= \ 6x^2 - 2xy + 3xy - y^2$$

$$= \ 6x^2 + xy - y^2$$

在上例的第(2)題中，x^2+5x+6 的x^2項(或稱**二次項**)係數為 1，x項(或稱**一次項**)係數為 5，常數項為 6，其中最高次項為二次，所以稱 x^2+5x+6 為x的二次多項式，並簡稱為**一元二次式**。

在第(3)題中，$6x^2+xy-y^2$ 有x、y兩個變數，其中 $6x^2$、xy和$-y^2$都是二次項。因此，它的最高次項為二次，所以稱它為x和y的二次多項式，並簡稱為**二元二次式**。

【類題練習 1】展開下列各式：

(1) $(5x+2)(2x-3)$　　　　(2) $(-2x+3y)(3x-4y)$

二項式相乘公式也常運用於來簡化數的計算過程，例如：

求 123×279＋127×121＋123×121＋127×279 的值。

在上面的算式中，我們觀察到 123×279 與 123×121 有公因數 123，127×121 與 127×279 有公因數 127，所以

$$\begin{aligned}
&123\times279+127\times121+123\times121+127\times279\\
&=123\times279+123\times121+127\times279+127\times121\\
&=123\times(279+121)+127\times(279+121)\\
&=(279+121)\times(123+127)\\
&=400\times250\\
&=100000
\end{aligned}$$

【完全平方公式】

將公式 1 中的 c、d 分別以 a、b 代入，即可得

$$\begin{aligned}
(a+b)(a+b) &= a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b\\
&= a^2 + 2ab + b^2 ,
\end{aligned}$$

因而得到和的平方公式：

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \qquad \text{【公式 2】}$$

【**範例 2**】利用公式 2 展開下列各式：

(1) $(x+1)^2$　　　(2) $(2x+3y)^2$

【**解**】 (1) $(x+1)^2 = x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2$

$= x^2+2x+1$

(2) $(2x+3y)^2 = (2x)^2+2\cdot(2x)\cdot(3y)+(3y)^2$

$= 4x^2+12xy+9y^2$

同樣的，若將公式 1 中的 b、c、d 分別以 $-b$、a、$-b$ 代入，即可得

$$(a-b)(a-b) = a\cdot a+a\cdot(-b)+(-b)\cdot a+(-b)\cdot(-b)$$

$$= a^2-2ab+b^2 \text{，}$$

因而得到差的平方公式：

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \qquad \text{【公式 3】}$$

其實，只要將公式 2 中的 b 改為 $-b$，也可得到公式 3。

【**範例 3**】利用公式 3 展開下列各式：

(1) $(x-a)^2$　　　(2) $(2x-3y)^2$

【**解**】 (1) $(x-a)^2 = x^2-2\cdot x\cdot a+a^2$

$= x^2-2ax+a^2$

(2) $(2x-3y)^2 = (2x)^2-2\cdot(2x)\cdot(3y)+(3y)^2$

$= 4x^2-12xy+9y^2$

我們也常用和或差的平方公式來簡化數的計算，例如：在求 109^2 時，可將 109 寫成 $100+9$，再利用公式 2 即可求得：

$$109^2 = (100+9)^2 = 100^2+2\times100\times9+9^2$$

$$= 10000 + 1800 + 81$$
$$= 11881$$

我們知道 $a+b+c=(a+b)+c$，所以利用和的完全平方公式，即可得到：

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= [(a+b)+c]^2\\ &= (a+b)^2+2\cdot(a+b)\cdot c+c^2\\ &= a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2\\ &= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\end{aligned}$$

因此，得到三項和的完全平方公式：

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac \qquad \text{【公式 4】}$$

【範例 4】利用公式 4 展開下列各式：

(1) $(x+y+3)^2$　　(2) $(a+2b-3c)^2$

【解】 (1) $(x+y+3)^2 = x^2+y^2+3^2+2\cdot x\cdot y+2\cdot y\cdot 3+2\cdot 3\cdot x$

$$= x^2+y^2+9+2xy+6y+6x$$
$$= x^2+2xy+y^2+6x+6y+9$$

(2) $(a+2b-3c)^2 = [a+(2b)+(-3c)]^2$

$$= a^2+(2b)^2+(-3c)^2+2a(2b)+2(2b)(-3c)+2(-3c)a$$
$$= a^2+4b^2+9c^2+4ab-12bc-6ca$$

【類題練習 2】利用公式 4 展開 $(2x-y-3z)^2$ 。

若將公式 1 中的 c、d 分別以 a、$-b$ 取代，即可得：

$$(a+b)(a-b) = a\cdot a+\cancel{a\cdot(-b)}+\cancel{b\cdot a}+b\cdot(-b)$$
$$= a^2-b^2$$

因而得到平方差公式：

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2 \qquad \text{【公式 5】}$$

【範例 5】利用公式 5 展開下列各式：

(1) $(3x+4y)(3x-4y)$　　　(2) $(a+b-c)(a-b+c)$

【解】　(1) $(3x+4y)(3x-4y)=(3x)^2-(4y)^2$

$$=9x^2-16y^2$$

(2) 因為 $a+b-c=a+(b-c)$ 和 $a-b+c=a-(b-c)$，所以可以得到：

$$\begin{aligned}(a+b-c)(a-b+c) &= [a+(b-c)][a-(b-c)]\\ &= a^2-(b-c)^2\\ &= a^2-(b^2-2bc+c^2)\\ &= a^2-b^2+2bc-c^2\end{aligned}$$

如同完全平方公式，我們也常利用平方差公式來簡化數的計算。例如：求117^2-17^2的值時，我們可得到下列算式：

$$\begin{aligned}117^2-17^2 &= (117+17)(117-17)\\ &= 134\times100\\ &= 13400\end{aligned}$$

又如求 107×93 的值時，我們觀察到 $107=100+7$、$93=100-7$，所以可得到下列算式：

$$\begin{aligned}107\times93 &= (100+7)(100-7)\\ &= 100^2-7^2\\ &= 10000-49\\ &= 9951\end{aligned}$$

【類題練習 3】求下列各式的展開式：

(1) $(x+3y+1)(x-3y-1)$　　　(2) $(x+y)^2(x-y)^2$

【家庭作業】

1. 展開下列各式：

① $(1+2a)(2-3b)$

② $(-x+5y)(2x-y)$

③ $(\frac{2}{3}a+\frac{3}{2}b)^2$

④ $(2x-y+3)^2$

⑤ $(a-b-c)(a+b+c)$

⑥ $(a^2+2ab+4b^2)(a^2-2ab+4b^2)$

⑦ $(x-1)(x-2)(x-3)$

⑧ $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

⑨ $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

⑩ $(x-2)(x+2)(x^2+4)$

2. 回答下列各題：

① 求 $\frac{176^2}{138^2-38^2}$ 的值。

② 求 $2001\times2003-1998\times2006$ 的值。

③ 已知 $(6825.5)^2=6825^2+x$，求 x 的值。

④ 若 $(x^3+ax+2)(2x-a)$ 的展開式中，x^3 的係數為 9，求 a 的值。

1-2 立方公式

在國中時期同學們較少接觸到立方的乘法運算，事實上，在多項式的乘法和因式分解的過程中，立方公式也經常被引用。

【立方和與立方差】

我們可利用分配律來展開一次式與二次式的乘積。例如，展開 $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 即可得到：

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2-ab+b^2) &= a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3\\ &= a^3+b^3\end{aligned}$$

因此，得到立方和公式：

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \qquad \text{【公式 6】}$$

【範例 1】利用公式 6 展開下列各式：

(1) $(x+2)(x^2-2x+4)$　　(2) $(2a+5b)(4a^2-10ab+25b^2)$

【解】

(1) $$\begin{aligned}(x+2)(x^2-2x+4) &= (x+2)(x^2-x\cdot 2+2^2)\\ &= x^3+2^3\\ &= x^3+8\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}&(2a+5b)(4a^2-10ab+25b^2)\\ =\ &(2a+5b)[(2a)^2-(2a)(5b)+(5b)^2]\\ =\ &(2a)^3+(5b)^3\\ =\ &8a^3+125b^3\end{aligned}$$

同樣的，我們可以展開 $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ 並經合併化簡後，而得到立方差公式：

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3 \qquad \text{【公式 7】}$$

其實，只要把公式 6 中的 b 以 $-b$ 代入，即可得公式 7。

【範例 2】利用公式 7 展開下列各式：

(1) $(2x-1)(4x^2+2x+1)$　　(2) $(\frac{a}{3}-\frac{b}{2})(\frac{a^2}{9}+\frac{ab}{6}+\frac{b^2}{4})$

【解】

(1)
$$\begin{aligned}(2x-1)(4x^2+2x+1) &= (2x-1)[(2x)^2+(2x)\cdot 1+1^2]\\ &= (2x)^3-1^3\\ &= 8x^3-1\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}(\frac{a}{3}-\frac{b}{2})(\frac{a^2}{9}+\frac{ab}{6}+\frac{b^2}{4}) &= (\frac{a}{3}-\frac{b}{2})[(\frac{a}{3})^2+\frac{a}{3}\cdot\frac{b}{2}+(\frac{b}{2})^2]\\ &= (\frac{a}{3})^3-(\frac{b}{2})^3\\ &= \frac{a^3}{27}-\frac{b^3}{8}\end{aligned}$$

【類題練習 1】(1) 展開 $(5a-\frac{b}{2})(25a^2+\frac{5ab}{2}+\frac{b^2}{4})$ 。

(2) 展開 $(x^2-xy-6y^2)(x^2-2xy+4y^2)(x^2+3xy+9y^2)$ 。

(3) 已知 $x^3=2$ ，求 $(x-3)(x^2+3x+9)$ 的值。

【完全立方公式】

在展開 $(a+b)^3$ 時，可先將 $(a+b)^3$ 寫成

$$(a+b)(a+b)^2 ，$$

再利用和的平方公式與分配律展開即可，也就是說：

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2\\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

由此，我們可得到和的完全立方公式：

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$　　【公式 8】

同樣的，展開$(a-b)^3$的乘積，並經化簡後即可得到差的完全立方公式：

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$ 【公式 9】

其實，只要將公式 8 中的 b 以 $-b$ 代入，同樣可得上式。

【範例 3】展開下列各式：

(1) $(x+2)^3$ (2) $(3x+2y)^3$ (3) $(4a-5b)^3$

【解】 (1) $(x+2)^3 = x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3$

$= x^3+6x^2+12x+8$

(2) $(3x+2y)^3 = (3x)^3+3(3x)^2(2y)+3(3x)(2y)^2+(2y)^3$

$= 27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3$

(3) $(4a-5b)^3 = (4a)^3-3(4a)^2(5b)+3(4a)(5b)^2-(5b)^3$

$= 64a^3-240a^2b+300ab^2-125b^3$

【類題練習 2】展開下列各式：

(1) $(\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y)^3$ (2) $(4a^2-\frac{5}{2}b)^3$

【家庭作業】

1. 展開下列各式：

① $(-x-2)^3$

② $(2a-3b)^3$

③ $(\frac{x}{3}+\frac{y}{2})(\frac{x^2}{9}-\frac{xy}{6}+\frac{y^2}{4})$

④ $(2a-\frac{b}{2})(4a^2+ab+\frac{b^2}{4})$

⑤ $(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

⑥ $(a^2-9)(a^2+3a+9)(a^2-3a+9)$

2. 回答下列各題：

① 求 $(5\frac{1}{3})^3+(4\frac{2}{3})^3$ 的值。

② 已知 $a+b=3$ 且 $ab=2$，求 a^3+b^3 的值。

③ 已知 $a-b=-1$ 且 $a^2+b^2=5$，求 a^3-b^3 的值。

④ 已知 $x^3=2$，求 $(x^2-1)(x^4+x^2+1)$ 的值。

1-3 多項式的除法

在小學時，我們會以下列的長除法（直式計算法）來求出 58 除以 13 得到商數 4，餘數 6：

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \cline{2-2} 13\,) & 58 \\ & 52 \\ \cline{2-2} & 6 \end{array}$$

同時，我們也知道：

$$58 = 13\times4+6$$

事實上，在自然數的除法中，我們有下列的規則：

被除數 ＝ 除數 × 商數＋餘數，

其中，商數和餘數為非負整數，且餘數小於除數。同樣的，在多項式的除法中，我們也有類似的規則：

被除式 ＝ 除式 × 商式＋餘式，

其中，商式的次數等於被除式的次數減去除式的次數，且餘式的次數要小於除式的次數。

類似於自然數的除法，多項式的除法運算也有直式計算法（長除法）；為了簡化計算，也常使用分離係數法。事實上，這兩種方法的差別在於計算過程中，有沒有將文字符號寫出來而已。

【範例 1】求 $(x^2+4x+2)\div(x+1)$ 的商式及餘式。

【解】 方法一：直式計算法

$$\begin{array}{rr} & x+3 \\ \cline{2-2} x+1\,) & x^2+4x+2 \\ x(x+1) \Rightarrow & x^2+x \\ \cline{2-2} & 3x+2 \\ 3(x+1) \Rightarrow & 3x+3 \\ \cline{2-2} & -1 \end{array}$$

方法二：分離係數法

$$\begin{array}{rr} & 1+3 \\ \cline{2-2} 1+1\,) & 1+4+2 \\ & 1+1 \\ \cline{2-2} & 3+2 \\ & 3+3 \\ \cline{2-2} & -1 \end{array}$$

商式為 $x+3$，餘式為 -1。

在完成多項式的除法後，為了驗證所得結果是否正確，除了重新檢視運算過程外，也常用上述「**被除式 ＝ 除式 × 商式＋餘式**」的概念來驗算。例如：

$$(x+1)(x+3)+(-1) \qquad \text{（除式×商式＋餘式）}$$
$$= x^2+4x+3-1$$
$$= x^2+4x+2 \qquad \text{（被除式）}$$

【範例 2】 求 $(2x^3+5x^2+x+5)\div(x+2)$ 的商式及餘式。

【解】

$$\begin{array}{r|l} & 2+1-1 \\ \hline 1+2 & 2+5+1+5 \\ & 2+4 \\ \hline & \quad\;\; 1+1 \\ & \quad\;\; 1+2 \\ \hline & \qquad -1+5 \\ & \qquad -1-2 \\ \hline & \qquad\qquad\;\; 7 \end{array}$$

商式為 $2x^2+x-1$，餘式為 7。

做分離係數法時，當除式或被除式缺項時，需要補 0。

【範例 3】 求 $(3x^2+2)\div(2x-1)$ 的商式及餘式。

【解】 因為 $3x^2+2=3x^2+0\cdot x+2$，所以用 $3+0+2$ 來表示 $3x^2+2$。

$$\begin{array}{r|l} & \frac{3}{2}+\frac{3}{4} \\ \hline 2-1 & 3+0+2 \\ & 3-\frac{3}{2} \\ \hline & \quad\;\; \frac{3}{2}+2 \\ & \quad\;\; \frac{3}{2}-\frac{3}{4} \\ \hline & \qquad\quad 2\frac{3}{4} \end{array}$$

商式為$\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{4}$，餘式為$2\dfrac{3}{4}$。

【**範例 4**】求$(6x^3-7x^2-4x+8)\div(3x^2+x-2)$的商式及餘式。

【**解**】

$$
\begin{array}{r l}
 & 2-3 \\ \cline{2-2}
3+1-2\;) & 6-7-4+8 \\
 & 6+2-4 \\ \cline{2-2}
 & \quad -9+0+8 \\
 & \quad -9-3+6 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad 3+2
\end{array}
$$

商式為 $2x-3$，餘式為 $3x+2$。

【**範例 5**】求$(3x^3+8x^2+7x+2)\div(x^2+2x+1)$的商式及餘式。

【**解**】

$$
\begin{array}{r l}
 & 3+2 \\ \cline{2-2}
1+2+1\;) & 3+8+7+2 \\
 & 3+6+3 \\ \cline{2-2}
 & \qquad 2+4+2 \\
 & \qquad 2+4+2 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

商式為 $3x+2$，餘式為 0。

當餘式為 0 時，我們稱除式整除被除式，例如：在上例中，x^2+2x+1 整除 $3x^3+8x^2+7x+2$。

【**類題練習**】求下列各除法運算的商式及餘式：

(1) $(2x^2+x+5)\div(x+3)$　　(2) $(-6x^2+5x+1)\div(2x-1)$

(3) $(x^4-1)\div(x-1)$　　(4) $(2x^2+5x)\div(x+5)$

【家庭作業】

1. 求下列各除法運算的商式及餘式：

① $(9x^2+18x+8)\div(3x+4)$　　② $(7x^2+11x-3)\div(2x+3)$

③ $(x^3+1)\div(x-1)$　　④ $(x^3+2x-1)\div(x-5)$

⑤ $(x^4+2x^3-x+4)\div(x^2+3x-2)$

⑥ $(x^4+1)\div(x^2-1)$

2. 已知 $3x^3-6x+13=3(ax+b)(x^2-2x+2)+1$，求 a、b 的值。

3. 已知某多項式除以 $(2x-1)$，可得商式 (x^2-2x+1)，餘式 3，求此多項式。

4. 已知 $4x^3-13x+k$ 可被 $(2x+1)$ 整除，求 k 的值。

5. 已知一長方體的體積為 x^3+4x^2+x-6、長為 $x+3$ 且寬為 $x+2$，求此長方體的高。

二、因式分解

在第一章中，我們知道兩個 x 的一次式乘積展開後成為 x 的二次多項式。反過來說，如果能將一個 x 的二次式寫成兩個 x 的一次式的乘積，我們稱這樣的過程為這個二次式的**因式分解**。此時，這兩個一次式都稱為二次多項式的**因式**，而這個二次多項式則稱為這兩個一次式的**倍式**。

在高中的課程中，我們也將一個多項式寫成幾個一次或二次的多項式的連乘積，這種過程也稱為這個多項式的因式分解。例如：

$$x^2-x-2 \underset{\xleftarrow{\text{乘積展開}}}{\xrightarrow{\text{因式分解}}} (x+1)(x-2)$$

$$x^3-6x^2+11x-6 \underset{\xleftarrow{\text{乘積展開}}}{\xrightarrow{\text{因式分解}}} (x-1)(x-2)(x-3)$$

在國中階段做因式分解時，我們只考慮因式的係數為有理數（整數或分數）的情形。但從此以後，我們將不再要求因式的係數一定是有理數。

現在來介紹幾個常用的方法：**提公因式、分組分解、十字交乘和利用乘法公式**。

2-1 提公因式

【從各項提公因式】

如果發現每一項都有共同的因式時，我們可先將此公因式提出。

【範例 1】 因式分解下列多項式：

(1) x^2+5x　　(2) $(a-b)^2-2(a-b)$

(3) $(x-2y)^2+(2y-x)^3$

【解】 (1) $x^2+5x= x\cdot x+5\cdot x= x(x+5)$

(2) $(a-b)^2-2(a-b)=(a-b)(a-b)-2(a-b)$

$=(a-b)[(a-b)-2]$

$=(a-b)(a-b-2)$

(3) $(x-2y)^2+(2y-x)^3= (x-2y)^2-(x-2y)^3$

$= (x-2y)^2[1-(x-2y)]$

$= (x-2y)^2(1-x+2y)$

【分組提公因式】

當各項沒有公因式時，可嘗試分組或去括號重新分組，使得每組之間有公因式。

【範例 2】因式分解下列多項式：

(1) x^3+x^2+x+1　　(2) $2xy+5x+4y+10$

(3) $2ax^2-3x+2ax-3$　　(4) $xy(1+z^2)+z(x^2+y^2)$

【解】 (1) $x^3+x^2+x+1= x^2(x+1)+(x+1)$

$= (x+1)(x^2+1)$

(2) 方法一：

$2xy+5x+4y+10= (2xy+5x)+(4y+10)$

$= x(2y+5)+2(2y+5)$

$= (2y+5)(x+2)$

方法二：

$2xy+5x+4y+10= (2xy+4y)+(5x+10)$　　（交換律）

$= 2y(x+2)+5(x+2)$

$= (x+2)(2y+5)$

(3) 方法一：

$2ax^2-3x+2ax-3= (2ax^2-3x)+(2ax-3)$

$= x(2ax-3)+(2ax-3)$

$= (2ax-3)(x+1)$

方法二：

$$
\begin{aligned}
2ax^2-3x+2ax-3 &= (2ax^2+2ax)-(3x+3)\\
&= 2ax(x+1)-3(x+1)\\
&= (x+1)(2ax-3)
\end{aligned}
$$

(4) 可嘗試去括號展開後，再重新分組。

$$
\begin{aligned}
xy(1+z^2)+z(x^2+y^2) &= xy+xyz^2+zx^2+zy^2\\
&= (xy+zx^2)+(xyz^2+zy^2)\\
&= x(y+zx)+yz(xz+y)\\
&= x(y+xz)+yz(y+xz)\\
&= (y+xz)(x+yz)
\end{aligned}
$$

從上面的例子我們可以看出，某些多項式可能有不只一種分組的方式來做因式分解。

【拆項後分組提公因式】

有時候，可嘗試先將多項式中某一項拆開後，再利用分組提公因式。

【範例 3】因式分解下列多項式：

(1) $x^4+x^3+2x^2+x+1$ (2) $x^4+3x^3+x^2-3x-2$

【解】 (1)

$$
\begin{aligned}
& x^4+x^3+2x^2+x+1\\
=\ & x^4+x^3+x^2+x^2+x+1 \qquad (2x^2=x^2+x^2)\\
=\ & x^2(x^2+x+1)+(x^2+x+1)\\
=\ & (x^2+x+1)(x^2+1)
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
& x^4+3x^3+x^2-3x-2\\
=\ & x^4+3x^3+2x^2-x^2-3x-2 \qquad (x^2=2x^2-x^2)\\
=\ & x^2(x^2+3x+2)-(x^2+3x+2)\\
=\ & (x^2+3x+2)(x^2-1)\\
=\ & (x+1)(x+2)(x-1)(x+1)\\
=\ & (x+1)^2(x+2)(x-1)
\end{aligned}
$$

事實上，範例 3 的第(2)題也可用分組的方式來因式分解：

$$\begin{aligned} x^4+3x^3+x^2-3x-2 &= (x^4+x^2-2)+(3x^3-3x) \\ &= (x^2-1)(x^2+2)+3x(x^2-1) \\ &= (x^2-1)(x^2+3x+2) \\ &= (x+1)(x-1)(x+1)(x+2) \\ &= (x+1)^2(x+2)(x-1) \end{aligned}$$

【類題練習】因式分解下列多項式：

(1) $x^4+x^3+6x^2+5x+5$ (2) $x^4-x^3-7x^2+13x-6$

【家庭作業】

因式分解下列多項式：

1. $3a^2b+6ab^2$
2. $(a-2)(b+3)+4(2-a)(3+b)$
3. $3(a-3)-(a^2-3a)$
4. $2ab-a+6b-3$
5. $xy(1-z^2)+z(x^2-y^2)$
6. $2x^2-5x+2$
7. $x^4+x^3-x^2-2x-2$
8. $(ax-bx)^2-(b-a)^3x$
9. $(x-2)^3+(2-x)(x^2-4x+1)$
10. x^3+2x^2+2x+1

2-2 十字交乘法

因為大家都已熟悉十字交乘法，所以在這裡只舉例，而不做文字說明。

【二次三項式】

【範例 1】因式分解下列多項式：

(1) x^2-x-90　　(2) $6x^2y^2+xy-15$

【解】 (1) $x^2-x-90=(x+9)(x-10)$

$$\begin{array}{ccc} x & & +9 \\ & \times & \\ x & & -10 \end{array}$$

(2) $6x^2y^2+xy-15=(3xy+5)(2xy-3)$

$$\begin{array}{ccc} 3xy & & +5 \\ & \times & \\ 2xy & & -3 \end{array}$$

【類題練習】因式分解下列多項式：

(1) $5x^2+2x-51$　　(2) $380-x-x^2$

【家庭作業】

因式分解下列多項式：

1. $5x^2-5x-10$
2. $ax^2-(a-b)x-b$
3. $2(x-y)^2+3(y-x)-5$
4. $9x^2-35x-4$
5. $7a^2-14ab-105b^2$
6. $4x^4-13x^2-12$
7. $(a+b)(a+b-4)-12$
8. $(x^2-x+1)^2-3(x^2-x)-7$
9. $(x-4y)(x+4y)+6xy$

2-3 利用乘法公式

對於某些多項式，我們可直接利用乘法公式來做因式分解。

【完全平方】

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

【範例 1】 因式分解下列各式：

(1) a^2+6a+9　　(2) $4x^2-12xy+9y^2$

(3) $(x+2y)^2+6(x+2y)(y-x)+9(x-y)^2$

【解】 (1) $a^2+6a+9=a^2+2\cdot a\cdot 3+3^2=(a+3)^2$

(2) $4x^2-12xy+9y^2=(2x)^2-2\cdot(2x)\cdot(3y)+(3y)^2$

$=(2x-3y)^2$

(3) $(x+2y)^2+6(x+2y)(y-x)+9(x-y)^2$

$=(x+2y)^2-2\cdot(x+2y)\cdot[3(x-y)]+[3(x-y)]^2$

$=[(x+2y)-3(x-y)]^2$

$=(-2x+5y)^2$（或寫成 $(2x-5y)^2$）

【平方差】

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

【範例 2】 因式分解下列各式：

(1) $x^2-(x+2y)^2$　　(2) $9-(a+2)^2$　　(3) $x^2-y^2+2yz-z^2$

【解】 (1) $x^2-(x+2y)^2=[x+(x+2y)][x-(x+2y)]$

$=(x+x+2y)(x-x-2y)$

$=(2x+2y)(-2y)$

$=2(x+y)(-2y)$

$=-4y(x+y)$

(2) $9-(a+2)^2 = 3^2-(a+2)^2$

$= [3+(a+2)][3-(a+2)]$

$= (3+a+2)(3-a-2)$

$= (a+5)(1-a)$

(3) $x^2-y^2+2yz-z^2 = x^2-(y^2-2yz+z^2)$

$= x^2-(y-z)^2$

$= [x+(y-z)][x-(y-z)]$

$= (x+y-z)(x-y+z)$

【立方差、立方和】

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

【範例 3】因式分解下列各式：

(1) x^3-1　　(2) a^3+8b^3　　(3) x^6-y^6

【解】 (1) $x^3-1 = x^3-1^3$

$= (x-1)(x^2+x\cdot 1+1^2)$

$= (x-1)(x^2+x+1)$

(2) $a^3+8b^3 = a^3+(2b)^3$

$= [a+(2b)][a^2-a\cdot(2b)+(2b)^2]$

$= (a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$

(3) $x^6-y^6 = (x^3)^2-(y^3)^2$

$= (x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$= (x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

【類題練習 1】因式分解下列各式：

(1) x^3+x^2-2　　(2) a^6-64b^6

在範例 3 的第(3)題中，也可以將 x^6-y^6 寫成 $(x^2)^3-(y^2)^3$，因此得到：

$$\begin{aligned} x^6-y^6 &= (x^2)^3-(y^2)^3 \\ &= (x^2-y^2)[(x^2)^2+x^2y^2+(y^2)^2] \\ &= (x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4) \end{aligned}$$

顯然的，$x^4+x^2y^2+y^4$ 可以再分解，我們將在下一個單元裡，介紹它的分解方法。

【配方法】

利用完全平方公式或完全立方公式，再配合平方差公式或前面介紹的方法，可以處理一些特殊多項式的因式分解，這裡需要一些拆項(分項)或補項(加減項)的技巧，要多練習。

【範例 4】 因式分解下列多項式：

(1) a^4+a^2+1　　(2) $9x^4+5x^2+1$

【解】 (1) $$\begin{aligned} a^4+a^2+1 &= a^4+2a^2-a^2+1 \\ &= a^4+2a^2+1-a^2 \\ &= (a^2+1)^2-a^2 \\ &= (a^2+1+a)(a^2+1-a) \\ &= (a^2+a+1)(a^2-a+1) \end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned} 9x^4+5x^2+1 &= 9x^4+6x^2-x^2+1 \\ &= 9x^4+6x^2+1-x^2 \\ &= (3x^2+1)^2-x^2 \\ &= (3x^2+1+x)(3x^2+1-x) \\ &= (3x^2+x+1)(3x^2-x+1) \end{aligned}$$

事實上，在範例 4 的第(1)題中，所見到的

$$(a^2+a+1)(a^2-a+1) = a^4+a^2+1$$

也是一個常見的乘法公式。

【類題練習 2】 因式分解下列各式：

(1) $a^4+a^2b^2+b^4$ (2) $9x^4+11x^2+4$

【範例 5】因式分解下列多項式：

(1) x^3-y^3 (2) x^4+4

【解】 (1) 雖然可以直接引用立方差公式來因式分解x^3-y^3，我們也可以用補項的概念來因式分解。

$$\begin{aligned} x^3-y^3 &= x^3-3x^2y+3xy^2-y^3+3x^2y-3xy^2 \\ &= (x-y)^3+3xy(x-y) \\ &= (x-y)[(x-y)^2+3xy] \\ &= (x-y)(x^2-2xy+y^2+3xy) \\ &= (x-y)(x^2+xy+y^2) \end{aligned}$$

(2) 很顯然，x^4+4無法直接使用平方差公式來分解。所以，我們嘗試用補項的方法來克服困難。

$$\begin{aligned} x^4+4 &= x^4+4x^2+4-4x^2 \\ &= (x^2+2)^2-(2x)^2 \\ &= (x^2+2+2x)(x^2+2-2x) \\ &= (x^2+2x+2)(x^2-2x+2) \end{aligned}$$

在國中時期，因為我們要求因式分解後的各個因式的係數皆為有理數，所以有些二次式無法分解。如果允許因式的係數可為任意實數，那麼我們就可以用配方法來分解它。

【範例 6】因式分解x^2+4x+1。

【解】

$$\begin{aligned} x^2+4x+1 &= x^2+4x+4-4+1 \\ &= (x+2)^2-3 \\ &= (x+2)^2-(\sqrt{3})^2 \\ &= (x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3}) \end{aligned}$$

【類題練習 3】 利用配方法的技巧，來因式分解下列各式：

(1) x^3+y^3　(2) x^4+64　(3) x^2+8x+9

【家庭作業】

因式分解下列各式：

1. $2x^2-18$
2. $\dfrac{1}{4}-(3+a)^2$
3. $x^2-4x(b-a)+4(a-b)^2$
4. $2x^3+16y^3$
5. x^3+x^2-36
6. $25a^4+6a^2+1$
7. $a^4-8a^2b^2+16b^4$
8. $x^2-y^2+6yz-9z^2$
9. $(a^2-1)(b^2-1)-4ab$
10. $-8+125x^3$

三、平方根與立方根

除了平方根以外，三次方根（也稱立方根）及其它的高次方根也常出現在高中數學課程中，如指數與三角函數等單元。在國中階段，方根的學習是以認識及計算平方根為主，在本章中，我們將學習平方根與立方根的四則運算與根式中分母的有理化，並介紹雙重根式的化簡。

3-1 平方根

我們知道每一個正數 a 都有兩個平方根，其中正的平方根記作「$\sqrt{a}$」，讀作「二次根號 a」，並簡稱為「根號 a」；而負的平方根記作「$-\sqrt{a}$」，例如：4 的平方根記作$\pm\sqrt{4}$，即$\sqrt{4}=2$ 及$-\sqrt{4}=-2$。當 $a=0$ 時，a 的兩個平方根都為 0。在這裡，a 稱為**被開方數**。

在本節中，除了在雙重根式的情形外，所有的被開方數均為非負的有理數。

【平方根的乘法與除法】

我們首先看如何做平方根之間的乘法及除法運算。因為

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2 &= (\sqrt{a}\times\sqrt{b})\times(\sqrt{a}\times\sqrt{b})\\
&= (\sqrt{a}\times\sqrt{a})\times(\sqrt{b}\times\sqrt{b})\\
&= (\sqrt{a})^2\times(\sqrt{b})^2\\
&= ab，
\end{aligned}
$$

由定義我們知道$(\sqrt{ab})^2=ab$，所以

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}\text{，其中 } a\text{、}b\geq 0\text{。}$$

同樣的，我們知道

$$\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\text{，其中 } a\ \geq 0\text{、}b>0\text{。}$$

在數學上，我們稱含有根號的算式為**根式**。例如：$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$、$\sqrt{2}+\sqrt{3}$

和$\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$都是根式。事實上，形如$\sqrt{a}$的數也稱為根式。

【範例 1】計算下列根式：

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{12}$　　(2) $\sqrt{\dfrac{1}{5}}\times\sqrt{\dfrac{45}{4}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$　　(4) $\sqrt{\dfrac{6}{5}}\div\sqrt{\dfrac{2}{15}}$

【解】

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{12}=\sqrt{36}=6$

(2) $\sqrt{\dfrac{1}{5}}\times\sqrt{\dfrac{45}{4}}=\sqrt{\dfrac{1}{5}\times\dfrac{45}{4}}=\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3}{2}$

(3) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{18}{2}}=\sqrt{9}=3$

(4) $\sqrt{\dfrac{6}{5}}\div\sqrt{\dfrac{2}{15}}=\sqrt{\dfrac{6}{5}\div\dfrac{2}{15}}=\sqrt{\dfrac{6}{5}\times\dfrac{15}{2}}=\sqrt{9}=3$

【類題練習 1】計算下列根式：

(1) $\sqrt{5}\times\sqrt{20}$　　(2) $\sqrt{\dfrac{27}{8}}\times\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$　　(4) $\sqrt{\dfrac{15}{4}}\div\sqrt{\dfrac{3}{5}}$

【最簡根式】

當一個整數 a 為某個整數的平方時，我們就稱 a 為**完全平方數**，也叫做**平方數**，例如：$81=9^2$，所以 81 為完全平方數，因此$\sqrt{81}=9$。另外，當被開方數是整數，且不是一個完全平方數時，我們可利用數的標準分解式及平方根的乘法，來化簡根式。例如：化簡$\sqrt{360}$時，我們先把 360 寫成標準分解式：

$$360=2^3\times 3^2\times 5=(2\times 3)^2\times 2\times 5$$，

再化簡得到

$$\sqrt{360}=\sqrt{(2\times 3)^2\times 2\times 5}=6\sqrt{10}$$ 。

當被開方數為有理數時，通常會將運算結果寫成分母不含有根號的形式。例如：我們會將平方根$\sqrt{\dfrac{8}{3}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$改寫成下列的形式：

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{(\sqrt{3})^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\ （或\frac{2}{3}\sqrt{6}）$$

也就是說，習慣上我們會將一個正有理數的平方根寫成$\dfrac{p}{q}\sqrt{n}$或$\dfrac{p\sqrt{n}}{q}$的形式，其中$\dfrac{p}{q}$為最簡分數，n 為大於 1 的整數，並且不能被任何大於 1 的整數的平方整除，我們稱這種形式的根式($\dfrac{p}{q}\sqrt{n}$或$\dfrac{p\sqrt{n}}{q}$)為「**最簡根式**」。例如：$6\sqrt{10}$和$\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$都是最簡根式；但$\sqrt{360}$和$\sqrt{\dfrac{8}{3}}$就不是最簡根式。我們稱將平方根化成最簡根式的過程為「**平方根化簡**」。

【範例 2】 將下列根式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{12}$ (2) $\sqrt{63}$ (3) $\sqrt{\dfrac{45}{2}}$

【解】 (1) $\sqrt{12}=\sqrt{4\times 3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{63}=\sqrt{9\times 7}=\sqrt{9}\times\sqrt{7}=3\sqrt{7}$

(3) $\sqrt{\dfrac{45}{2}}=\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3^2\times 5}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{5}\times\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3}{2}\sqrt{10}$

【類題練習 2】將下列根式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{24}$ (2) $\sqrt{180}$ (3) $\sqrt{\dfrac{27}{2}}$ (4) $\sqrt{\dfrac{75}{7}}$

當兩個根式經過化簡後，如果在它們的最簡根式的根號內有相同的被開方數時，我們就稱這兩個平方根為**同類方根**。例如：$2\sqrt{3}$、$\sqrt{\frac{1}{3}}$（可化簡為$\frac{\sqrt{3}}{3}$）和$-\sqrt{3}$都是同類方根，但$\sqrt{3}$與$\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$就不是同類方根。

做根式的計算時，我們通常會將式中的同類方根合併，並且將結果的每一項化為最簡根式。往後我們所稱的根式化簡是指將結果以最簡根式的形式表示。

【範例 3】化簡下列根式：

(1) $-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+7\sqrt{2}-6\sqrt{3}$ (2) $-\sqrt{12}+4\sqrt{3}+\sqrt{75}-\sqrt{18}$

(3) $\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{54}+\frac{1}{\sqrt{3}}$

【解】

(1) $-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+7\sqrt{2}-6\sqrt{3}=(-3+7)\sqrt{2}+(2-6)\sqrt{3}$

$=4\sqrt{2}-4\sqrt{3}$

(2) $-\sqrt{12}+4\sqrt{3}+\sqrt{75}-\sqrt{18}=-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}+5\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

$=7\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{54}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}+3\sqrt{6}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$

$=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+3\sqrt{6}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{7\sqrt{6}}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{6}$

【類題練習 3】化簡下列根式：

(1) $4\sqrt{6}-8\sqrt{3}+7\sqrt{6}-4\sqrt{3}$ (2) $3\sqrt{5}+6\sqrt{3}-\sqrt{45}+\sqrt{75}$

(3) $\sqrt{\frac{5}{3}}+\sqrt{\frac{7}{16}}+\sqrt{60}+\frac{1}{\sqrt{7}}$

現在來看看如何做根式的乘積展開。事實上，我們常利用乘法公式

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

來展開形如

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}+\sqrt{d})$$

根式乘積的算式。

【範例 4】化簡下列根式：

(1) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})$　　　(2) $(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})$

【解】　(1) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})=\sqrt{2}\times\sqrt{6}+\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\sqrt{3}\times\sqrt{6}+\sqrt{3}\times\sqrt{3}$

$$=\sqrt{12}+\sqrt{6}+\sqrt{18}+3$$

$$=3+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

(2) 利用平方差公式，可得

$$(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})=(\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2$$

$$=7-2=5$$

【類題練習 4】化簡下列根式：

(1) $(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{75})$　　　(2) $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$

【根式分母的有理化】

如同方根，一般來說，我們會把根式化為分母不含根號的形式。現在以下面的例子做說明。

【範例 5】將下列各式化為分母不含根號的根式：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$　　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

【解】　(1)　我們利用等值分數的特性及平方差公式，使分母不含根號。

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1\times(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}$$

$$=\sqrt{2}-1$$

(2) $$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{1\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}$$

$$=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

利用上述的方法，將根式化為分母不含根號的形式的過程稱為**分母的有理化**。

【類題練習 5】有理化下列各式的分母：

(1) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (2) $\frac{2}{\sqrt{15}-3}$

【範例 6】有理化$\frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$的分母。

【解】 因為 $(1-\frac{\sqrt{2}}{2})(1+\frac{\sqrt{2}}{2})=1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2=1-\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，

所以 $\frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1\times(1+\frac{\sqrt{2}}{2})}{(1-\frac{\sqrt{2}}{2})(1+\frac{\sqrt{2}}{2})}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=2(1+\frac{\sqrt{2}}{2})=2+\sqrt{2}$。

【類題練習 6】 有理化$\dfrac{1}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$的分母。

【雙重根式的化簡】

假設 a、b 為兩個非負的數，而且 $a \ge b$。因為

$$(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2\pm 2\sqrt{ab}=a+b\pm 2\sqrt{ab}\text{，}$$

所以

$$\sqrt{a+b\pm 2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\text{。}$$

因此得到：

如果$\sqrt{x\pm 2\sqrt{y}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$（其中 $a \ge b$），則 $x=a+b$、$y=ab$。

【範例 7】 化簡下列各式：

(1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$　　(2) $\sqrt{8-\sqrt{28}}$

【解】 (1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2+1+2\sqrt{2\times 1}}$

$=\sqrt{2}+\sqrt{1}=\sqrt{2}+1$

(2) $\sqrt{8-\sqrt{28}}=\sqrt{8-2\sqrt{7}}$

$=\sqrt{7+1-2\sqrt{7\times 1}}$

$=\sqrt{7}-\sqrt{1}=\sqrt{7}-1$

【想想看】 為何需要在$\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$這個公式中，要求 $a \ge b$？

【類題練習 7】 化簡下列各式：

(1) $\sqrt{7+2\sqrt{12}}$　　(2) $\sqrt{12-4\sqrt{5}}$

【範例 8】 化簡 $\sqrt{4-\sqrt{7}}$ 。

【解】 $\sqrt{4-\sqrt{7}}=\sqrt{\dfrac{8-2\sqrt{7}}{2}}=\dfrac{\sqrt{7+1-2\sqrt{7\times 1}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{2}}$

$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{7}-1)}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2}$$

【類題練習 8】 化簡 $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ 。

【家庭作業】

1. 化簡下列各式：

① $\sqrt{162}$　② $\sqrt{250}$　③ $\frac{2}{\sqrt{6}}$　④ $\sqrt{\frac{5}{6}}$

2. 化簡下列根式：

① $\sqrt{3}\times\sqrt{18}$　② $\sqrt{\frac{7}{12}}\times\sqrt{\frac{10}{21}}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{50}}\times\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}}$

④ $\sqrt{\frac{3}{5}}\div\sqrt{3}$　⑤ $\sqrt{\frac{7}{11}}\div\sqrt{\frac{21}{44}}$

3. 化簡下列各式：

① $\sqrt{6}(\sqrt{18}-\sqrt{15})$　② $-4\sqrt{5}+6\sqrt{3}+\sqrt{5}-3\sqrt{3}$

③ $\sqrt{84}-\sqrt{54}-\sqrt{32}-\sqrt{18}$　④ $(\sqrt{95}+\sqrt{35})(\sqrt{95}-\sqrt{35})$

⑤ $(\sqrt{67}+7)(\sqrt{67}-7)$　⑥ $(2\sqrt{5}+3)(2\sqrt{5}-3)$

4. 化簡下列各式：

① $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$　② $\frac{50}{\sqrt{3}-1}$

③ $\frac{58}{\sqrt{7}-6}$　④ $\frac{51}{\sqrt{73}-11}$

⑤ $\frac{2}{\sqrt{7}+3}+\frac{4}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}$　⑥ $\frac{1}{\sqrt{5}-2}+\frac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{11}}$

⑦ $\frac{1}{2-\frac{\sqrt{2}}{2}}$　⑧ $\sqrt{8-2\sqrt{12}}$

⑨ $\sqrt{14-8\sqrt{3}}$　⑩ $\sqrt{5-\sqrt{21}}$

3-2 立方根

在本單元裡，我們將討論立方根的性質和運算規則。

不同於平方根的被開方數必須是非負的數，立方根的被開方數可以是任意實數。當實數 a 為某個實數 b 的三次方時，我們就稱 b 為 a 的**立方根**，並記作 $\sqrt[3]{a}=b$，其中 $\sqrt[3]{a}$ 讀作「**三次根號 *a***」，並稱 a 為「**被開方數**」。例如：$27=3^3$ 及 $-8=(-2)^3$，所以 $\sqrt[3]{27}=3$ 及 $\sqrt[3]{-8}=-2$。顯然的，被開方數與它的立方根同號。我們只討論被開方數為有理數的立方根。

【立方根的乘法與除法】

兩個立方根之間的乘法與除法運算類似於平方根的情形，有下列的規則：

$$(1)\quad \sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{ab}$$

$$(2)\quad \sqrt[3]{a}\div\sqrt[3]{b}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\text{，其中 } b\neq 0\text{。}$$

【範例 1】計算下列各式：

(1) $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{3}$　　(2) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\times\sqrt[3]{4}$

(3) $\sqrt[3]{4}\div\sqrt[3]{2}$　　(4) $\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\div\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$

【解】

(1) $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3\times 5}=\sqrt[3]{15}$

(2) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\times 4}=\sqrt[3]{2}$

(3) $\sqrt[3]{4}\div\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{4\div 2}=\sqrt[3]{2}$

(4) $\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\div\sqrt[3]{\frac{9}{2}}=\sqrt[3]{\frac{4}{3}\div\frac{9}{2}}=\sqrt[3]{\frac{4}{3}\times\frac{2}{9}}=\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{2}{3}$

【類題練習 1】計算下列各式：

(1) $\sqrt[3]{25}\times\sqrt[3]{5}$　　(2) $\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{3}$

(3) $\sqrt[3]{15}\div\sqrt[3]{5}$　　(4) $\sqrt[3]{\dfrac{4}{25}}\div\sqrt[3]{\dfrac{5}{16}}$

由規則(1)知道，$\sqrt[3]{-5}=\sqrt[3]{(-1)^3\times 5}=(-1)\times\sqrt[3]{5}=-\sqrt[3]{5}$。因此，習慣上，我們常將 $\sqrt[3]{-a}$ 改寫成 $-\sqrt[3]{a}$，其中 a 為正數。

【最簡根式】

當被開方數為整數且不是一個完全立方數時，如同平方根的情形，我們可以利用數的標準分解式及立方根的乘法，來化簡根式。例如：化簡 $\sqrt[3]{720}$ 時，我們先將 720 寫成 $2^4\times 3^2\times 5=2^3\times 2\times 3^2\times 5$，再利用乘法公式求得

$$\sqrt[3]{720}=\sqrt[3]{2^3\times 2\times 3^2\times 5}=2\sqrt[3]{90}\text{ 。}$$

當被開方數為有理數時，通常會將運算結果寫成分母不含有根號的形式。例如，我們會將 $\sqrt[3]{\dfrac{8}{5}}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}$ 改寫成

$$\frac{2}{\sqrt[3]{5}}=\frac{2\times\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{5^2}}=\frac{2\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}}=\frac{2\sqrt[3]{25}}{5}\text{（或 }\frac{2}{5}\sqrt[3]{25}\text{）。}$$

類似平方根的化簡，我們將立方根寫成「**最簡根式**」$\dfrac{p}{q}\sqrt[3]{n}$（或 $\dfrac{p\sqrt[3]{n}}{q}$）的形式，其中 $\dfrac{p}{q}$ 為最簡分數，n 為大於 1 的整數，並且不能被任何大於 1 的整數的立方整除，我們稱這樣的過程為「**立方根化簡**」。例如：$2\sqrt[3]{90}$ 及 $\dfrac{2}{5}\sqrt[3]{25}$ 都是最簡根式。

【範例 2】化簡下列各式：

(1) $\sqrt[3]{270}$　　(2) $\sqrt[3]{-512}$　　(3) $\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$

【解】　(1) $\sqrt[3]{270}=\sqrt[3]{3^3\times 10}=3\sqrt[3]{10}$

(2) 因為$-512=-2^4\times 3^3=-(2\times 3)^3\times 2$，

所以$\sqrt[3]{-512}=-\sqrt[3]{(2\times 3)^3}\times\sqrt[3]{2}=-6\sqrt[3]{2}$。

(3) 我們可先將$\dfrac{2}{3}$的分子、分母同乘於3^2後再做化簡，即

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{2\times 3^2}{3\times 3^2}}=\frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{3^3}}=\frac{\sqrt[3]{18}}{3}\text{。}$$

【類題練習 2】化簡下列各式：

(1) $\sqrt[3]{135}$　　(2) $\sqrt[3]{-3000}$　　(3) $\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}}$

當兩個立方根化為最簡根式後，如果在它們的最簡根式的立方根號內有相同的被開方數時，我們就稱這兩個立方根為**同類方根**。例如，$\sqrt[3]{2}$、$\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$（可化為$\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$）和$-\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$都是同類方根，但是$\sqrt[3]{2}$與$\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$（可化為$\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$）就不是同類方根。

在化簡根式時，我們可以利用同類方根的合併來簡化數學式。

【範例 3】化簡下列各式：

(1) $-2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}+6\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{3}$　　(2) $4\sqrt{7}+\sqrt[3]{96}+\sqrt[3]{\dfrac{7}{27}}-\sqrt[3]{\dfrac{81}{2}}$

【解】　(1) $-2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}+6\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{3}=(-2+6)\sqrt[3]{2}+(3-5)\sqrt[3]{3}$

$=4\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{3}$

$$(2)\ \ 4\sqrt{7}+\sqrt[3]{96}+\sqrt[3]{\frac{7}{27}}-\sqrt[3]{\frac{81}{2}}=4\sqrt{7}+2\sqrt[3]{12}+\frac{\sqrt[3]{7}}{3}-\frac{3\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$=4\sqrt{7}+2\sqrt[3]{12}+\frac{\sqrt[3]{7}}{3}-\frac{3\sqrt[3]{3\times2\times2}}{\sqrt[3]{2\times2\times2}}$$

$$=4\sqrt{7}+2\sqrt[3]{12}+\frac{\sqrt[3]{7}}{3}-\frac{3\sqrt[3]{12}}{2}$$

$$=4\sqrt{7}+\frac{\sqrt[3]{12}}{2}+\frac{\sqrt[3]{7}}{3}$$

註：$\sqrt{7}$和$\sqrt[3]{7}$不是同類方根。

【類題練習 3】化簡下列各式：

(1) $-4\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{2}-6\sqrt[3]{3}$　　(2) $\sqrt[3]{32}+\sqrt[3]{\frac{2}{27}}+\sqrt{8}-\sqrt[3]{\frac{125}{2}}$

對於某些較為特殊的根式乘積，可嘗試利用乘法公式。我們先複習兩個常用的立方公式：

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

【範例 4】利用立方公式化簡$(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$。

【解】　我們可以利用第一個公式來化簡，令 $a=\sqrt[3]{3}$、$b=\sqrt[3]{2}$。

$$(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})=(\sqrt[3]{3})^3+(\sqrt[3]{2})^3$$

$$=3+2=5$$

【類題練習 4】利用立方公式化簡$(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4})$。

【根式分母的有理化】

如同平方根的有理化技巧，我們也可利用立方乘法公式來做分母含有立方根的根式的有理化。

【範例 5】有理化下列各根式的分母：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$

【解】　(1) 由立方公式，我們知道

$$(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)=(\sqrt[3]{2})^3+1^3=2+1=3。$$

所以，若想將分母的根號去掉，可對分子與分母同乘以 $(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)$ 即可。因此得到：

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}=\frac{1\times(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}{(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{3}$$

(2) 我們對分子與分母同乘以 $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$ ，即得

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}=\frac{1\times(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})}{(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{3})^3-(\sqrt[3]{2})^3}$$

$$=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\ 。$$

【類題練習 5】有理化下列各根式的分母：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}$

【家庭作業】

1. 求下列各數的立方根：

① 64　　② -729

2. 將下列各數化簡成最簡根式：

① $\sqrt[3]{128}$　　② $\sqrt[3]{-4000}$

3. 化簡下列各式：

① $\sqrt[3]{36}\times\sqrt[3]{6}$　　② $\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{45}$

4. 化簡 $\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$ 。

5. 化簡下列各式：

① $-6\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{3}+8\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{3}$　　② $10\sqrt{2}+\sqrt[3]{8}+\sqrt{18}+\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$

6. 化簡 $(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)$ 。

7. 有理化下列各根式的分母：

① $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-1}$　　② $\dfrac{1}{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4}}$

四、一元二次方程式

就一般而言，凡是使得方程式等號成立的數稱之為方程式的**解**；而使得多項式的值為零的數稱之為多項式的**根**。因此，一元二次方程式的解就是所對應的二次多項式的根。所以，我們也稱此類方程式的解為根。

我們將首先介紹常見的一元二次方程式的三種解法：**因式分解法**、**配方法**和**公式解**。然後，利用判別式來探討兩根的特性，最後再討論根與係數之間的關係。

4-1 一元二次方程式的解法

【因式分解法】

因為一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$（a、b 和 c 為實數且 $a\neq 0$）的左式為二次多項式，如果我們能將這個多項式因式分解成兩個一次多項式的乘積，就很容易求得方程式的解。我們以下面的例子來說明這種解法。

【範例 1】 求 $2x^2+1=5x-1$ 的解。

【解】 利用移項可把原方程式改寫為 $2x^2-5x+2=0$。

由因式分解，可得 $2x^2-5x+2=(2x-1)(x-2)$

因此，原方程式改寫為 $(2x-1)(x-2)=0$

所以，可得 $2x-1=0$ 或 $x-2=0$

即 $x=\dfrac{1}{2}$ 或 $x=2$。

【類題練習 1】 求 $3x^2+10x+3=0$ 的解。

【配方法】

我們也可以利用平方根的概念來解方程式，例如將 $x^2-4x+2=0$ 改寫為 $(x-2)^2=2$ 的形式，進而解得 $x=2\pm\sqrt{2}$ 。其過程如下：

$$x^2-4x+2=0 \Rightarrow x^2-4x=-2$$

兩邊同加 2^2 $\Rightarrow x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2=-2+2^2$

左式可寫成完全平方式 $\Rightarrow (x-2)^2=2$

∵右式為正，兩邊開平方 $\Rightarrow x-2=\pm\sqrt{2}$

$\Rightarrow x=2\pm\sqrt{2}$

上面的例子是利用配成完全平方式的方法，先將方程式改寫成 $(x-h)^2=k$ 的形式。當 $k\geq 0$ 時，我們就可以利用平方根的概念來解題：

即 $(x-h)^2=k\geq 0$

兩邊同時開方 $\Rightarrow x-h=\pm\sqrt{k}$

移項 $\Rightarrow x=h\pm\sqrt{k}$

註：$x=h\pm\sqrt{k}$ 表示 $x=h+\sqrt{k}$ 或 $x=h-\sqrt{k}$ 。

我們將這個方法稱為配方法，也就是配成完全平方的意思。以下的例題繼續來說明這種解法。

【範例 2】求下列各方程式的解：

(1) $x^2-6x+8=0$　　(2) $2x^2+4x-6=0$

【解】 (1) $x^2-6x+8=0 \Rightarrow x^2-2\cdot x\cdot 3=-8$

$\Rightarrow x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2=-8+3^2$

$\Rightarrow (x-3)^2=1$

$\Rightarrow x-3=\pm 1$

$\Rightarrow x-3=1$ 或 $x-3=-1$

$\Rightarrow x=2$ 或 $x=4$

(2) $2x^2+4x-6=0 \Rightarrow x^2+2x-3=0$

$\Rightarrow x^2+2x=3$

$\Rightarrow x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2=3+1^2$

$\Rightarrow (x+1)^2=4$

$\Rightarrow x+1=\pm 2$

$\Rightarrow x+1=2$ 或 $x+1=-2$

$\Rightarrow x=1$ 或 $x=-3$

在上例中，我們當然也可用十字交乘法來做因式分解。但下面的例題，因不易做因式分解，所以配方法會成為一個很好用的解法。

【範例 3】求下列各方程式的根：

(1) $x^2-6x+2\ =0$ (2) $3x^2+5x-4\ =0$

【解】 (1) $x^2-6x+2=0 \Rightarrow x^2-6x=-2$

$\Rightarrow x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2=-2+3^2$

$\Rightarrow (x-3)^2=7$

$\Rightarrow x-3=\pm\sqrt{7}$

$\Rightarrow x-3=\sqrt{7}$ 或 $x-3=-\sqrt{7}$

$\Rightarrow x=3-\sqrt{7}$ 或 $x=3+\sqrt{7}$

註：我們常以 $x=\ 3\pm\sqrt{7}$ 來表示 $x=\ 3+\sqrt{7}$ 或 $x=\ 3-\sqrt{7}$。

(2) $3x^2+5x-4=0 \Rightarrow 3x^2+5x=4$

$\Rightarrow x^2+\frac{5}{3}x=\frac{4}{3}$

$\Rightarrow x^2+2\cdot x\cdot\frac{5}{6}+(\frac{5}{6})^2=\frac{4}{3}+(\frac{5}{6})^2$

$\Rightarrow (x+\frac{5}{6})^2=\frac{73}{36}$

$\Rightarrow x+\frac{5}{6}\ =\ \pm\frac{\sqrt{73}}{6}$

$\Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{73}}{6}$

觀察：在範例 3 第(1)題中，

兩個根的和為 $(3+\sqrt{7})+(3-\sqrt{7})=6$，

兩個根的積為 $(3+\sqrt{7})\times(3-\sqrt{7})=3^2-(\sqrt{7})^2=9-7=2$。

在範例 3 第(2)題中，

兩個根的和為 $\dfrac{-5+\sqrt{73}}{6}+\dfrac{-5-\sqrt{73}}{6}=-\dfrac{5}{3}$，

兩個根的積為 $\dfrac{-5+\sqrt{73}}{6}\times\dfrac{-5-\sqrt{73}}{6}=\dfrac{(-5)^2-(\sqrt{73})^2}{6^2}=-\dfrac{48}{36}=-\dfrac{4}{3}$。

同學們能看出這兩個方程式的兩根和與積似乎和方程式的係數之間有著某種關係嗎？

【類題練習 2】利用配方法求下列各式的解：

(1) $x^2-3x-1=0$　　(2) $4x^2-3x-2=0$

【公式解】

將配方法運用在一般式 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ 的求解時，其步驟如下：

方程式	$ax^2+bx+c=0$	$(a\neq 0)$
兩邊同除以 a	$x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$	
常數項移到右邊	$x^2+\dfrac{b}{a}x=-\dfrac{c}{a}$	
在左右二式同加 $(\dfrac{b}{2a})^2$	$x^2+2\cdot x\cdot\dfrac{b}{2a}+(\dfrac{b}{2a})^2=-\dfrac{c}{a}+(\dfrac{b}{2a})^2$	
左式可化為完全平方	$(x+\dfrac{b}{2a})^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$	

這個結果與前面 $(x-h)^2=k$ 的形式相同，因為 $(x+\dfrac{b}{2a})^2$ 恆為正數或 0，所以當 $b^2-4ac\geq 0$ 時，我們得到

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\ ,$$

即

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\text{（或寫成 }x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\text{）。}$$

也就是說，當$b^2-4ac\geq 0$時，方程式$ax^2+bx+c=0$的解為：

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\text{ 或 }x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

雖然利用配方法解一元二次方程式的程序較為複雜，但觀察其過程，每一步驟都有跡可循。若避開繁複的運算過程，直接將方程式的係數代入這個解的通式，即可得到方程式的解。因此，我們利用上面的通式求解，稱為**公式解**。

雖然我們將在下一節中，才會完整的討論如何由b^2-4ac的符號來了解方程式$ax^2+bx+c=0$兩個根的特性，在這裡仍先稱b^2-4ac為**根的判別式**。

【範例 4】用公式解求$x^2-6x+2=0$的解。

【解】 先檢驗判別式是否大於 0 或等於 0。因為$b^2-4ac=28>0$，所以方程式有實數解。由公式解得知：

$$\begin{aligned}x&=\frac{-(-6)\pm\sqrt{28}}{2\times 1}\\&=\frac{6\pm 2\sqrt{7}}{2}\\&=3\pm\sqrt{7}\end{aligned}$$

【類題練習 3】利用根的公式解下列方程式：

(1) $x^2-3x-1=0$　　(2) $4x^2-3x-2=0$

我們可以利用一元二次方程式的解法，來解某些類型的方程式，現在來看下面的例子。

【範例 5】已知一個正數比其倒數的兩倍多 1，求此數。

【解】 設此正數為 x。

依題意列式 $x-2\cdot\frac{1}{x}=1$

兩邊同乘以 x，得 $x^2-2=x$

移項得一元二次方程式 $x^2-x-2=0$

$\because$ $x^2-x-2=(x+1)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=2$ 或 $x=-1$（不合題意）

所以，此正數為 2。

【類題練習 4】解方程式$3x+\frac{2}{x}=6$。

【範例 6】一個長為 a，寬為 b 的矩形，如果它的長與寬滿足$\frac{b}{a}=\frac{a-b}{b}$的關係，我們稱之為「**黃金矩形**」。求黃金矩形的長與寬的比值為何？

【解】 令$\frac{a}{b}=x$。

$\because$ $\frac{b}{a}=\frac{a-b}{b}=\frac{a}{b}-\frac{b}{b}=\frac{a}{b}-1$

$\therefore$ $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}-1\Rightarrow\frac{1}{x}=x-1$

再來解$\frac{1}{x}=x-1$。

兩邊同乘以 x，得 $1=x^2-x$

移項得 $x^2-x-1=0$

利用根的公式，可得

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}$$

所以，$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$（負的不合）。

因此，長與寬的比值為$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$（約為 1.62）。

【類題練習 5】解方程式$\frac{x}{x^2-1}+\frac{x^2-1}{x}=\frac{13}{6}$。

【家庭作業】

1. 解下列各方程式：

① $\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{6}x-1=0$　　② $(x-3)^2-2(x-3)-3=0$

③ $x^2+3=6x$　　④ $-0.5x-0.1x^2=0.5$

2. 已知$-\frac{1}{2}$為 $ax^2+3x-a=0$ 的一根，求 a 的值及另一根。

3. 設$\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$為方程式$4x^2+4x+c=0$的一根，求 c 的值。

4. ① 已知$3x^2-6x-21$可化為$3(x+p)^2+q$的形式，求 p、q 的值。

② 利用①求方程式$3x^2-6x-21=0$的兩根。

5. 解下列各方程式：

① $\frac{x+5}{7}=\frac{1}{x-1}$　　② $x+\frac{2}{x-2}=5$　　③ $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$

6. 若 x 滿足$x+\frac{4}{x}=-4$，求$x-\frac{1}{x}$的值。

7. 已知某水果商人以 6000 元買進芒果一批。淘汰賣相不佳的芒果 30 公斤，其餘的以每公斤按成本價加 10 元賣出，商人共得款 8100 元。問此商人原先買進芒果多少公斤？

4-2 根的判別

在前一節中，我們利用配方法將方程式 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ 改寫為 $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$。因為 $(x+\frac{b}{2a})^2$ 恆為正數或 0，所以右式 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 中的分子 b^2-4ac 必須為正數或 0，方程式才會有實數解。當 $b^2-4ac<0$ 時，我們不可能找到一個實數 x 使得 $(x+\frac{b}{2a})^2$ 等於 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$，所以

$ax^2+bx+c=0$ 沒有實數解。因此，一個一元二次方程式有沒有實數解，便可由 $b^2-4ac\geq 0$，或 $b^2-4ac<0$ 來判別，故稱 b^2-4ac 為「**根的判別式**」或簡稱為「**判別式**」。

現在將方程式 $ax^2+bx+c=0$ 根的判別規則整理如下：

(1) 若 $b^2-4ac>0$，則方程式的兩根為：

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ 或 } x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

因為兩根均為實數且不相等，所以稱此方程式有**兩個相異實根**。

(2) 若 $b^2-4ac=0$，則兩根為相等實數。所以稱此方程式有**兩個相等實根**，並常以 $x=-\frac{b}{2a}$（**重根**）來表示。

(3) 若 $b^2-4ac<0$，則此方程式**無實根**。

註：當數系由實數擴充到複數時，此方程式就會有兩個複數根。

【**範例 1**】判別下列方程式兩根的性質：

(1) $x^2+3x-5=0$　(2) $2x^2-5x+6=0$　(3) $-x^2+6x-9=0$

【**解**】 (1) $\because$ 判別式 $b^2-4ac=3^2-4\times1\times(-5)=29>0$

$\therefore$ 方程式有兩個相異實根：

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times(-5)}}{2\times1}=\frac{-3\pm\sqrt{29}}{2}$$

(2) $\because$ 判別式 $b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times6=-23<0$

$\therefore$ 方程式沒有實數解

(3) $\because$ 判別式 $b^2-4ac=6^2-4\times(-1)\times(-9)=0$

∴ 方程式有一個二重根：

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\times(-1)\times(-9)}}{2\times(-1)}$$

$$=\frac{-6\pm\sqrt{0}}{-2}=3\text{（重根）}$$

【範例 2】已知一元二次方程式$ax^2+ax+2=0$有一個二重根，求 a 的值。

【解】 原方程式有一個二重根⇒判別式等於 0

即 $a^2-4\cdot a\cdot 2=0\Rightarrow a(a-8)=0$

$\Rightarrow a=0$ 或 $a=8$

因為二次項係數 a 不能為 0，所以 $a=$ 8。

【類題練習】已知 a 為正整數且方程式 $x^2-ax+3=0$ 有兩個相異根，求 a 的最小值。

【家庭作業】

1. 判別下列方程式兩根的性質：

① $x^2-8x-20=0$ ② $6x^2-7x+3=0$ ③ $16x^2+8x+1=0$

2. 設 a 為任意實數，請問 $x^2+2ax+a=1$ 兩根的性質為何？

3. 已知$3x^2+(k-24)x+k=0$有一個二重根，求 k 的值。

4. 設 m、n 為相異兩數，請判別$(m^2+n^2)x^2+2(m+n)x+2=0$兩根的性質。

4-3 一元二次方程式的根與係數的關係

現在來探討在 **4-1** 的範例 3 中所提到的，兩根的和、兩根的積與係數之間的關係。

設 α 、 β 為方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根，因此 $ax^2+bx+c=0$ 可化成 $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ 。我們知道

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$\Rightarrow a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$\Rightarrow \quad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$\Rightarrow \quad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$

經由比較係數，得到 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ 及 $\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}$ 。因此，我們發現一元二次方程式的根與係數間有以下的關係：

若 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根為 α 、 β ，則 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ 及 $\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}$ 。

事實上，直接由公式解也可得到：

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

和

$$\alpha\cdot\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}$$

$$=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

【範例 1】設α、β為$x^2+3x-8=0$的兩根，求下列各式的值：

(1) $\alpha^2+\beta^2$　　(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$　　(3) $\alpha-\beta$

【解】　$\because \alpha$、β為$x^2+3x-8=0$的兩根

$\therefore \alpha+\beta=-\dfrac{3}{1}=-3$、$\alpha\beta=\dfrac{-8}{1}=-8$

(1) $\alpha^2+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-2\alpha\beta$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-3)^2-2(-8)=25$

(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\dfrac{-3}{-8}=\dfrac{3}{8}$

(3) $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

$=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(-3)^2-4(-8)=41$

所以$\alpha-\beta=\pm\sqrt{41}$。

若知道某一元二次方程式的兩根，我們能不能反推而求得這個一元二次方程式呢？

設α、β為所求方程式$ax^2+bx+c=0$的兩根。

等號兩邊同除以 a，得　$x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$

由根與係數的關係得知：　$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$、$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

因此，方程式可以改寫成$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$。

【範例 2】設α、β為$x^2+10x-50=0$的兩根。求以$\dfrac{1}{\alpha}$、$\dfrac{1}{\beta}$為兩根的方程式。

【解】　以$\dfrac{1}{\alpha}$及$\dfrac{1}{\beta}$為兩根的方程式可寫為：

$$x^2-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)x+\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=0 \qquad (1)$$

$\because$ α 、β 為 $x^2+10x-50=0$ 的兩根

$\therefore$ $\alpha+\beta=-10$ 、$\alpha\beta=-50$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{-10}{-50}=\frac{1}{5} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{-50}=-\frac{1}{50} \qquad (3)$$

將(2)、(3)的結果代入(1)中得到

$$x^2-\frac{1}{5}x-\frac{1}{50}=0 \text{。}$$

因此，該方程式可表為 $x^2-\frac{1}{5}x-\frac{1}{50}=0$，或 $50x^2-10x-1=0$。

【類題練習】 1. 設 α 、β 為 $x^2+4x-9=0$ 的兩根，求下列各式的值：

(1) $\alpha+\beta$ (2) $\alpha\beta$ (3) $\alpha^2+\beta^2$ (4) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$

2. 設 α 、β 為 $x^2+4x+2=0$ 的兩根，求以 α^2 、β^2 為兩根的方程式。

【範例 3】 甲、乙兩生同解一個一元二次方程式。因為甲看錯一次項係數，而解得兩根為 2 與 7；因為乙看錯常數項，而解得兩根為 1 與 -10；除此以外無其它錯誤。試求正確的兩根為何？

【解】 我們可設此一元二次方程式為 $x^2+bx+c=0$。

以 2 與 7 為兩根的一元二次方程式為

$$x^2-(2+7)x+2\times7=0\Rightarrow x^2-9x+14=0 \text{。}$$

因為甲只看錯一次項係數，所以常數項 $c=14$ 是正確的。

以 1 與 -10 為兩根的一元二次方程式為

$$x^2-(-10+1)x+(-10)\times1=0\Rightarrow x^2+9x-10=0 \text{。}$$

因為乙只看錯常數項，所以一次項係數 $b=9$ 是正確的。

綜合以上的討論得知，原方程式可表為 $x^2+9x+14=0$，也就是 $(x+2)(x+7)=0$，所以正確的兩根為 -2 或 -7。

【家庭作業】

1. 設 α 、 β 為 $x^2-2x-7=0$ 的兩根，求下列各式的值：

① $|\alpha-\beta|$　　② $\alpha^2+\beta^2$　　③ $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

④ $(\alpha-1)(\beta-1)$　　⑤ $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$

2. 甲、乙兩生同解一元二次方程式。甲看錯常數項而得到兩根 -1 和 -3，而乙看錯一次項係數得到兩根 4 和 -3，求正確的兩根。

3. 已知方程式的兩根為 $\dfrac{-1\pm5\sqrt{2}}{4}$ ，求此方程式。